

中国科学技术大学 博士学位论文



离子阱高保真度寻址量子门 与量子线路的实现与表征

作者姓名： 陈一龙

学科专业： 物理学

导 师： 黄运锋 研究员 崔金明 副研究员

完成时间： 二〇二六年五月二十五日

University of Science and Technology of China

A dissertation for doctor's degree



Experimental Realization and Characterization of High-Fidelity Addressed Quantum Gates and Quantum Circuits in a Trapped-Ion System

Author: Chen Yilong

Speciality: Physics

Supervisors: Prof. Huang Yunfeng, AR. Cui Jinming

Completion date: May 25, 2026

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解除后也遵守此规定。

☒公开 ☐控阅（____年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘要

量子计算利用量子叠加、量子纠缠和量子干涉等量子力学效应作为基本资源，有望在特定问题上突破经典计算的复杂度限制。然而，真实量子器件不可避免地受到退相干、控制误差、串扰、参数漂移和读出误差等噪声影响，从而限制可执行量子线路的深度、宽度与长期稳定性。为实现可扩展量子计算，需要发展容错量子计算：通过将一个逻辑量子比特编码在多个物理量子比特中，配合重复的稳定子测量（其测量结果构成综合征（syndrome））、译码和纠错操作，在物理错误率低于阈值的前提下，使得逻辑错误率能够随编码规模的增大而持续下降。

面向容错量子计算，量子处理器不仅需要高保真单比特门与两比特门，还需要具备长期稳定运行的软硬件环境、足够的量子比特规模、可编程且低串扰的寻址操控能力，以及支撑复杂量子线路的测控、编译与反馈架构。尤其对于重复稳定子测量与综合征提取这类结构化线路而言，系统的时序调度、相位基准一致性、参数维护和运行时校准闭环，往往与静态门指标同等重要。囚禁离子体系因量子比特均一性好、相干时间长、读出与操控精度高、系统可重构性强等优势，被广泛认为是实现高性能量子处理器和容错量子计算的重要候选平台之一。

基于此，本文以高通光离子阱为核心平台，围绕低串扰寻址、高保真量子门和多比特量子线路执行开展了系统研究，建立了从硬件平台构筑、原生量子门实现与表征到线路级验证的完整技术链路。

本论文的主要工作及创新性成果如下：

第一，构建了稳定运行的 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子计算实验平台。基于高通光离子阱系统，完成了各模块的搭建与联调，并建立了完整的 $^{171}\text{Yb}^+$ 基础操控能力。在关键性能参数上，射频功率稳定度在 13 h 时间尺度上达到 28 ppm；阱平台内部温度在数天量级连续运行中的波动不超过 0.04°C ；随机基准测试（randomized benchmarking, RB）的实验结果显示，微波单比特门平均保真度达到 99.9974(4)%。这些结果表明，本文平台已具备支撑长时间量子门标定与复杂量子线路运行的优良系统稳定性。

第二，设计并实现了低串扰 Raman 寻址体系。完成基于对称双侧声光偏转器（acousto-optic deflector, AOD）的可编程操作光路，在单离子寻址条件下，旁观离子的 Rabi 频率（拉比频率）串扰约为 1.19×10^{-3} 量级，为多离子局域量子门操作与复杂线路执行提供了关键支撑。

第三，实验实现与表征了高保真度量子门。基于两比特门的理论模型与误差分析框架，系统分析和实验标定了非共振载波激发、退相干和参数失配等主要误差来源。随机基准测试的实验结果显示，Raman 单比特门平均保真度达到 99.986(2)%，两比特 MS 门平均保真度达到 99.48(23)%；并在 5 比特子系统中完成了所有离子

对的全连通 MS 纠缠操作，Bell 态保真度达到 98.6(3)%–100.0(3)%。该结果已经达到了表面码（Surface code）等典型纠错方案约 99% 的物理门保真度阈值量级，为后续开展量子纠错原型实验奠定了基础。

第四，实验运行与验证了高保真度量量子线路。构建了支持多比特量子线路的分层测控与编译框架，通过相位跟踪、光移补偿和运行时校准闭环，将高保真量子门能力进一步落实为高保真量子线路能力；在此基础上完成了 5 比特 Greenberger–Horne–Zeilingner（GHZ）态制备，测得态保真度为 97.0(6)%，并在 5 比特子系统上实现了 Quantum Volume（QV）为 32 的系统级验证，重输出（heavy-output）生成概率平均值达到 0.754(12)，超过相应协议的 2/3 判据。

针对从噪声中等规模量子（NISQ）向容错量子计算过渡的系统需求，本文给出了一条基于离子阱的“硬件平台构筑—低串扰寻址—高保真量子门—系统级量子线路能力验证”的实验实现路径。同时，系统具备进一步扩展比特数并集成中间测量与译码等纠错模块的潜力，为后续开展量子纠错原型实验与大规模容错量子计算提供了可靠的实验与工程支撑。

关键词：囚禁离子；面向容错量子计算；低串扰寻址量子操作；高保真量子门；量子体积

ABSTRACT

Quantum computing exploits quantum-mechanical effects such as superposition, entanglement, and interference as fundamental resources, and is expected to surpass the computational complexity limits of classical computing for certain problems. However, practical quantum devices are inevitably subject to noise sources such as decoherence, control errors, crosstalk, parameter drift, and readout errors, which in turn limit the achievable depth, width, and long-term stability of executable quantum circuits. To realize scalable quantum computing, it is necessary to develop fault-tolerant quantum computing: by encoding one logical qubit into multiple physical qubits and combining repeated stabilizer measurements (whose outcomes constitute the syndrome) with decoding and correction operations, the logical error rate can be made to decrease continuously as the code size increases, provided that the physical error rate remains below the threshold.

For fault-tolerant quantum computing, a quantum processor requires not only high-fidelity single-qubit and two-qubit gates, but also a hardware and software stack capable of long-term stable operation, a sufficiently large qubit register, programmable low-crosstalk addressing and control, and a measurement-and-control, compilation, and feedback architecture that supports complex quantum circuits. In particular, for structured circuits involving repeated stabilizer measurements and syndrome extraction, system-level capabilities such as timing and scheduling, phase-reference consistency, parameter management, and runtime calibration loops are often as important as static gate metrics. Owing to their excellent qubit homogeneity, long coherence times, high-fidelity readout and control, and strong system reconfigurability, trapped-ion platforms are widely regarded as one of the most promising candidates for realizing high-performance quantum processors and fault-tolerant quantum computing.

Motivated by these considerations, this dissertation takes a high-optical-access ion trap as the core platform and carries out a systematic study centered on low-crosstalk addressing, high-fidelity quantum gates, and the execution of multiqubit quantum circuits, thereby establishing a complete technical route spanning hardware-platform construction, the implementation and characterization of native quantum gates, and circuit-level validation.

The primary contributions and original results of this dissertation are summarized as follows:

First, a stably operating $^{171}\text{Yb}^+$ quantum-computing experimental platform was con-

structed. Based on a high-optical-access ion-trap system, the construction and joint commissioning of all subsystems were completed, and a complete set of basic control capabilities for $^{171}\text{Yb}^+$ was established. In terms of key performance metrics, the RF power stability reached 28 ppm over a timescale of 13 h; the temperature fluctuation inside the trap platform remained within 0.04°C during continuous operation over several days; and the results of randomized benchmarking show that an average fidelity of 99.9974(4)% was achieved for microwave single-qubit gates. These results demonstrate that the present platform possesses the excellent system stability required to support long-duration quantum-gate calibration and the execution of complex quantum circuits.

Second, a low-crosstalk Raman addressing system was designed and implemented. A programmable operational optical path based on symmetrically arranged dual-side acousto-optic deflectors (AODs) was realized. Under single-ion addressing conditions, the spectator-ion Rabi-frequency crosstalk was on the order of 1.19×10^{-3} , providing critical support for local multiqubit gate operations and the execution of complex quantum circuits.

Third, high-fidelity quantum gates were experimentally realized and characterized. Based on the theoretical model and error-analysis framework for two-qubit gates, the major error sources, including off-resonant carrier excitation, decoherence, and parameter mismatch, were systematically analyzed and experimentally calibrated. The results of randomized benchmarking show that the average fidelity of Raman single-qubit gates reached 99.986(2)%, while the average fidelity of two-qubit MS gates reached 99.48(23)%. In addition, fully connected MS entangling operations were realized among all ion pairs in a 5-qubit subsystem, with Bell-state fidelities ranging from 98.6(3)% to 100.0(3)%. These results reach the physical-gate threshold scale of typical quantum-error-correction schemes such as the surface code, and provide a basis for future QEC prototype experiments.

Fourth, high-fidelity quantum circuits were experimentally realized and validated. A hierarchical measurement-and-control and compilation framework supporting multi-qubit quantum circuits was developed. Through phase tracking, light-shift compensation, and runtime calibration feedback loops, the capability of high-fidelity quantum gates was further extended to high-fidelity quantum-circuit execution. On this basis, a 5-qubit Greenberger–Horne–Zeilinger (GHZ) state was prepared with a measured state fidelity of 97.0(6)%, and a system-level demonstration of Quantum Volume (QV) = 32 was achieved on a 5-qubit subsystem, with an average heavy-output generation probability of 0.754(12), exceeding the corresponding 2/3 criterion.

Addressing the system requirements for transitioning from the noisy intermediate-

scale quantum (NISQ) era to fault-tolerant quantum computing, this dissertation presents an experimentally viable trapped-ion pathway spanning hardware-platform construction, low-crosstalk addressing, high-fidelity quantum gates, and system-level validation of quantum-circuit capability. At the same time, the system possesses the potential for further scaling in qubit number and the integration of error-correction modules such as mid-circuit measurement and decoding, thereby providing reliable experimental and engineering support for future quantum error-correction prototype experiments and large-scale fault-tolerant quantum computing.

KEY WORDS: Trapped ions, Fault-tolerant quantum computing, Low-crosstalk addressed operations, High-fidelity quantum gates, Quantum volume

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 量子信息与计算概述	2
1.1.1 量子比特与量子态	2
1.1.2 量子线路模型与逻辑门	3
1.1.3 从 NISQ 到容错量子计算的系统目标	4
1.2 量子计算物理实现与发展现状	4
1.2.1 主流物理实现路线简述	4
1.2.2 离子阱量子计算的发展路线与挑战	5
1.3 本文研究动机与主要创新点	6
1.3.1 面向系统级量子线路执行的技术瓶颈	6
1.3.2 本文的解决思路、技术进步与创新优势	7
1.3.3 系统建设路线	8
1.4 论文章节安排	8
第 2 章 高通光离子阱与离子捕获	10
2.1 Paul 阱中的离子运动模型	10
2.1.1 线性 Paul 阱模型与离子运动模型	10
2.1.2 额外微运动及补偿需求	13
2.2 高通光离子阱装置实现	14
2.2.1 刀片与高通光真空腔体	14
2.2.2 螺旋谐振腔 (Helical resonator)	15
2.2.3 射频机箱与功率稳定	18
2.2.4 高稳直流源机箱	20
2.3 装置表征、离子捕获与微运动补偿	22
2.3.1 几何参数与电学参数	22
2.3.2 射频与直流源机箱输出稳定性表征	25
2.3.3 离子捕获与额外微运动补偿	26
2.4 本章小结	30
第 3 章 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控理论	31
3.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特编码与操作流程	31
3.1.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级结构	31
3.1.2 离子烧蚀与装载原理	33

3.1.3 实验操作的典型时序	33
3.2 量子初态制备原理	34
3.2.1 多普勒冷却原理	34
3.2.2 EIT 冷却原理	36
3.2.3 光学抽运 (optical pumping) 方法与效率分析	40
3.3 二能级系统与微波驱动模型	41
3.3.1 Rabi 振荡与 Rabi 频率	41
3.3.2 Ramsey 干涉	42
3.4 量子态探测与 SPAM 误差	42
3.4.1 荧光探测技术	43
3.4.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 369 nm 荧光探测光子散射率	44
3.4.3 SPAM error 定义、缓解机制与参数标定	45
3.5 本章小结	49
第 4 章 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控实验实现	50
4.1 阱平台基础操控实验装置	50
4.1.1 阱平台基础操控光路	50
4.1.2 高通光成像光路	53
4.1.3 微波驱动系统	56
4.2 基础操控激光产生光路	57
4.2.1 369 nm 和 399 nm 光路	57
4.2.2 760 nm 和 935 nm 光路	60
4.2.3 532 nm 烧蚀装载光路	61
4.2.4 PDH 锁频系统	62
4.3 温度稳定与磁屏蔽系统	65
4.4 量子比特基础操控实验	68
4.4.1 冷却与初态制备	68
4.4.2 微波 Rabi 和 Ramsey	70
4.4.3 光子计数直方图	72
4.5 本章小结	73
第 5 章 基于 Raman 操作的离子量子门理论	74
5.1 受激 Raman 操作与单比特门 (以 $^{171}\text{Yb}^+$ 为例)	74
5.1.1 电磁场作用下的二能级 Rabi 模型	74
5.1.2 Λ 系统中的双光子 Raman 跃迁	76
5.1.3 声子外态与自旋内态的耦合	79

5.1.4 内外态耦合影响下的态演化方程	80
5.2 Mølmer-Sørensen (MS) 纠缠门	83
5.2.1 MS 门实现原理	83
5.2.2 MS 门保真度计算方法	86
5.3 门误差来源理论分析	88
5.3.1 单比特门误差	89
5.3.2 两比特 MS 门误差	90
5.3.3 采样误差与读出误差的不确定度分析	94
5.3.4 多离子链中的 MS 门调制方法	98
5.4 本章小结	102
第 6 章 高保真度量子门实验实现	103
6.1 面向可编程量子线路的 Raman 寻址操控系统	104
6.1.1 超远失谐 Raman 激光系统搭建与性能表征	104
6.1.2 基于声光偏转器 (AOD) 的低串扰寻址光路	106
6.1.3 Raman 寻址光路串扰表征与分析	111
6.2 离子声子模式表征实验	115
6.2.1 声子谱激发	115
6.2.2 声子加热率与相干时间表征	117
6.3 量子门实现与随机基准 (RB) 实验表征	120
6.3.1 单比特门随机基准测试	121
6.3.2 两比特 MS 门实验结果	124
6.3.3 两比特 MS 门随机基准测试	126
6.3.4 门误差实验标定与分析	128
6.4 本章小结	136
第 7 章 量子线路实验验证	139
7.1 量子线路编译与系统校准	139
7.1.1 测控任务分层编译框架	140
7.1.2 门序列相位连续拼接	143
7.1.3 关键参数校准更新策略	147
7.2 5 比特 GHZ 纠缠态制备	149
7.3 系统 QV32 验证	152
7.3.1 量子体积 (Quantum Volume) 基本定义	152
7.3.2 QV 测量协议及物理意义	152
7.3.3 QV 实验结果与讨论	155

7.4 本章小结	158
第 8 章 总结与展望	159
8.1 本文工作总结	159
8.2 工作优化方向	160
8.3 离子阱容错量子计算展望	161
参考文献	163
致谢	177
在读期间取得的科研成果	178

插图和附表清单

1.1 Bloch 球示意图	2
1.2 Bell 态制备线路	3
1.3 不锈钢腔体与玻璃 cell 对比	8
2.1 刀片组组装示意图	15
2.2 高通光真空腔体实物图	15
2.3 螺旋谐振腔模型图	16
2.4 RF 机箱原理图	18
2.5 RF 机箱实物图	19
2.6 RF 功率稳定原理图	20
2.7 DC 机箱实物图	21
2.8 直流源输出原理图	21
2.9 Helical 带载 Q 值测试	24
2.10 RF 功率稳定性测试结果	25
2.11 10 V 电压输出稳定性	26
2.12 离子阱整体实物图	27
2.13 典型囚禁结果	27
2.14 DC 刀片电极编号示意图	29
2.15 EMM 补偿二维图	29
2.16 EMM 补偿步进拟合图	30
3.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级图	32
3.2 冷却 369 nm 能级图	36
3.3 EIT 冷却 369 nm 能级图	39
3.4 Pumping 369 nm 能级图	40
3.5 Detecting 369 nm 能级图	43
4.1 测控系统整体示意图	51
4.2 阱平台光路 3D 示意图	51
4.3 阱平台光路 2D 示意图	52
4.4 MCPMT 信号逻辑	54
4.5 成像光路原理图	55
4.6 6 离子链 MC-PMT 成像	55

4.7	微波微带阵列位置	56
4.8	微波电子机箱原理图	56
4.9	1108 nm 种子光链路	57
4.10	EOM 时序控制原理图	58
4.11	369/399 nm 阱下光路	59
4.12	AOM 时序控制原理图	59
4.13	760/935 nm 光路原理图	60
4.14	760/935 nm 空间光路	61
4.15	532 nm 烧蚀光路	62
4.16	超稳腔 3D 图	63
4.17	超稳腔原理图	64
4.18	温控箱 3D 示意图	65
4.19	TEC 二级水冷温控	65
4.20	48 h 温度监测结果	66
4.21	内层磁屏蔽盒 3D 示意图	67
4.22	磁场强度监测	67
4.23	369 nm Doppler 线型	68
4.24	光学抽运测试时序	69
4.25	抽运时间扫描	70
4.26	微波 Rabi 时序	70
4.27	微波 Rabi 实验	71
4.28	微波 Ramsey 时序	71
4.29	微波 Ramsey 实验	72
4.30	光子计数直方图	72
5.1	Raman 过程示意图	76
5.2	MS 门激光配置	83
5.3	幅度调制包络示例	100
5.4	smooth gate 参数示例	101
6.1	Raman 双频输出与 Rabi 振荡	104
6.2	532 nm 功率稳定光路	105
6.3	Raman 寻址光路频率示意	106
6.4	SSA 与 DSA 串扰对比	107
6.5	对称 AOD 寻址系统	109
6.6	AOD 寻址光斑阵列	110

6.7	AOD 频率扫描与离子对准	111
6.8	双离子寻址的拉比串扰	112
6.9	不同输入功率下的 IMD 频谱	114
6.10	AOD 光斑中的 IMD 分量	114
6.11	边带谱测量时序	115
6.12	1 号离子边带谱	116
6.13	2 号离子边带谱	117
6.14	声子加热率测量时序	118
6.15	高频径向模热率测量	118
6.16	低频径向模加热率测量	119
6.17	COM 模热率线性拟合	119
6.18	微波单比特 RB	122
6.19	Raman 单比特 RB	123
6.20	MS 门时长扫描	124
6.21	MS 门宇称振荡	125
6.22	5 比特全连通 MS 门保真度	126
6.23	两比特 CRB 与参考实验	129
6.24	Rabi 频率漂移监测	131
6.25	红蓝边带耦合比漂移	132
6.26	COM 模频率漂移监测	132
7.1	测控任务分层编译框架流程图	141
7.2	MS 门构造 $R_{zz}(\pi/2)$	142
7.3	单比特 AC Stark shift 测试线路	145
7.4	两比特 AC Stark shift 测试线路	145
7.5	MS 相位追踪标定	146
7.6	线性复杂度校准策略	148
7.7	5 比特 GHZ 态制备线路及其中 CNOT 门的编译方式	149
7.8	GHZ 态布居测量	150
7.9	GHZ 态 parity 振荡	150
7.10	QV32 线路示例	154
7.11	QV32 统计结果	156
2.1	电极间距俯视图测量结果	22
2.2	电极间距垂直方向均匀性	23
2.3	DC 通道 pickup 测量结果	25

3.1	$^{171}\text{Yb}^+$ 主要光学跃迁	31
4.1	阱平台基础操作光功率	53
4.2	EOM 与 AOM 控制真值表	60
4.3	EIT 冷却典型参数	69
4.4	SPAM 实验参数汇总	73
6.1	不同 IA 系统比较	107
6.2	双离子读出条件概率	113
6.3	7 离子链径向模参数汇总	120
6.4	7 离子链中间 5 离子比特的单比特随机基准测试结果，平均 Clifford 保真度按 $F_{\text{avg}} = (1 + p)/2$ 计算。	123
6.5	RB 平均门保真度汇总	130
6.6	单比特与 MS 门误差预算	135
6.7	代表性离子阱团队门保真度比较	136
6.8	其他平台代表性团队门保真度比较	137
7.1	分层编译框架	140
7.2	单比特门与 MS 门 AC Stark Shift	145
7.3	MS 门与单比特门初始相位差	146
7.4	离子状态监测与处理	147
7.5	公开最大 QV 记录	157
7.6	QV 以外的系统级基准测试 (benchmark)	157

第 1 章 绪论

量子计算利用量子叠加、量子干涉和量子纠缠作为基本资源，有望在特定问题上突破经典计算的复杂度限制。1982 年，Feynman 提出利用量子系统模拟量子系统的构想^[1]，此后 Shor 算法与 Grover 算法分别在大整数分解和无结构搜索问题上给出了指数级与平方级加速的理论论证^[2-3]。在此基础上，基于量子比特和量子逻辑门的量子线路模型逐步发展为量子信息科学的核心框架^[5,17]。随着多种物理平台步入噪声中等规模量子（NISQ）阶段^[6]，量子模拟、变分量子算法与量子纠错原型实验快速推进，该领域的研究重心正逐步转向构建面向容错扩展的系统性量子处理能力——即在噪声与漂移不可避免的条件下，如何将门级精密控制持续、可编程、可复现地组织为可执行的量子线路，并进一步支撑重复综合征（syndrome）测量、译码与反馈所需的纠错回路运行^[7-12]。

在多种候选硬件平台中，囚禁离子因其长相干时间、量子比特天然均一、高保真门操作以及原生长程耦合等优势，被广泛视为通用量子计算的重要路线之一^[13-15]。然而，随着研究目标从单离子物理验证转向多离子可编程量子线路与纠错原型，离子阱系统面临的核心问题已不再是单个参数能否被独立调节，而是能否在多离子比特系统中，长期稳定地实现低串扰寻址操作、高保真单比特与两比特门、并行探测与中间测量、自动校准，并与测控软件栈相匹配地完成线路编译与运行。这些能力共同决定了系统在多轮重复量子线路下的有效误差模型与可扩展性^[10-12]。尤其对于基于 Raman 操作的离子阱平台，寻址光路的空间分辨率、相位与幅度稳定性、振动模匹配以及态制备与测量（SPAM）误差控制等，均会通过串扰与相关误差等机制直接映射到系统级量子线路性能^[9,13,16]。

本章首先回顾量子比特、量子线路模型与通用量子计算等基本概念，并阐明从 NISQ 走向容错量子计算的系统目标；随后简要梳理主流量子计算物理实现路线的发展现状，重点分析离子阱平台在实现低串扰寻址与高保真门集方面的优势与挑战；在此基础上阐明本文所关注的“高保真度寻址量子门线路实现”的研究动机及高通光（high optical access）平台在其中的支撑角色；最后给出全文的章节安排。

1.1 量子信息与计算概述

1.1.1 量子比特与量子态

量子比特 (qubit) 是量子信息处理的基本单元。与经典比特只能取 0 或 1 不同, 单量子比特纯态可以写为两维希尔伯特空间基矢 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 的相干叠加:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.1)$$

任意单量子比特纯态均可参数化为:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (1.2)$$

其中 θ 与 ϕ 分别对应 Bloch 球上的极角和方位角。该参数化将抽象的二维复数态空间转化为直观的几何图像, 有助于理解单比特相位、振幅及旋转操作的物理意义^[5,17]。

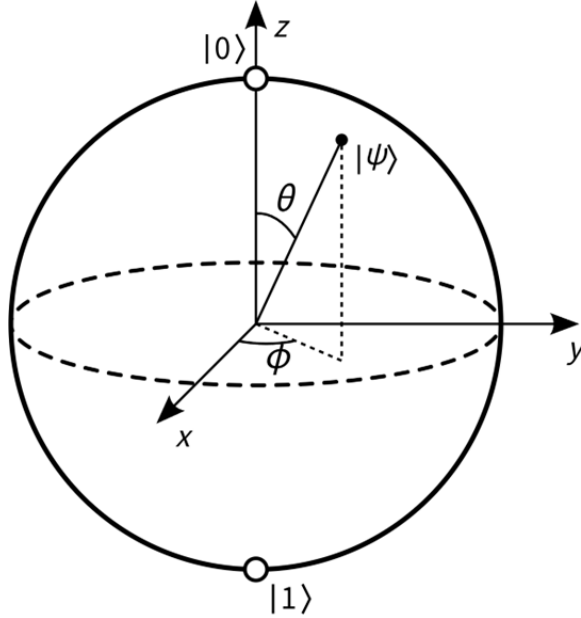


图 1.1 Bloch 球上单量子比特纯态的几何表示。图中态矢量由球坐标 (θ, ϕ) 唯一确定, 北极和南极分别对应计算基态 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 。

当系统包含 n 个量子比特时, 总希尔伯特空间由各子空间的张量积构成, 维数随比特数按 2^n 指数增长。这一指数维度既是量子计算潜在优势的核心来源, 也意味着状态表征、误差分析和经典模拟的代价会迅速增大。实际实验系统不可避免地受到环境噪声的影响, 因此通常需要用密度矩阵描述量子态:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1.3)$$

其中纯态是其特例, 满足 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 。后续章节在讨论退相干、随机误差和读出误差时, 均需借助密度矩阵和主方程语言来刻画系统演化^[17-18]。

多比特体系最重要的非经典特征之一是量子纠缠：若整体量子态不能表示为各子系统态的张量积，则称该态为纠缠态。典型的两比特 Bell 态之一为

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (1.4)$$

纠缠态是量子隐形传态、量子纠错和量子增强测量的基础资源，也是衡量量子处理器多比特操控能力的核心对象。在离子阱体系中，Cirac-Zoller 门与后续的 Mølmer-Sørensen (MS) 门分别将抽象的纠缠资源与具体的激光-振动模耦合机制联系起来，为高保真度多比特量子门实验提供了明确的物理实现路径^[19-20]。

1.1.2 量子线路模型与逻辑门

量子线路模型 (quantum circuit model) 将一个量子算法表示为若干量子逻辑门按时间顺序依次作用于量子初态的过程，最终通过测量获得经典比特串输出。对 n 个量子比特组成的系统，其整体演化可写为：

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = U |\psi_{\text{in}}\rangle, \quad U \in U(2^n). \quad (1.5)$$

在实际设计与实现中，通常并不直接操控任意高维幺正矩阵，而是将目标演化分解为由少量基本门构成的通用门集 (universal gate set)^[17,21]。例如，任意单比特门与 CNOT 门即构成一组标准通用门集；而在具体硬件平台上，高层线路还需进一步分解为与平台本征操作相适配的原生门 (native gates)。

对单量子比特而言，逻辑门可直观理解为 Bloch 球上的旋转，例如：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2}, \quad R_z(\phi) = e^{-i\phi Z/2}, \quad (1.6)$$

其中 X 和 Z 分别为 Pauli 算符。两比特纠缠门则在不同量子比特之间建立非经典关联。一个典型的例子是，先在第一比特上施加 Hadamard 门，再施加 CNOT 门，即可由初态 $|00\rangle$ 制备 Bell 态 $|\Phi^+\rangle$ 。

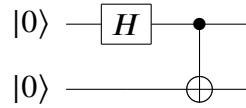


图 1.2 量子线路模型下的 Bell 态制备示意：先对第一量子比特施加 Hadamard 门，再施加 CNOT 门，即可将初态 $|00\rangle$ 变为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ 。

量子线路模型的一个关键优势在于，它为“算法—编译—硬件实现”提供了统一接口：上层算法以抽象逻辑门描述，而实验系统实际执行的是具有特定脉冲参数、连通结构和误差特性的原生门。以离子阱为例，单比特旋转与 MS 门是最常见的原生操作；对于超导平台，则常采用 CZ 门或 iSWAP 类门作为原生纠缠门^[13,22-23]。因此，量子处理器的实际能力不仅取决于能否实现单个门，更取决于高层线路能

否被高效编译为满足硬件约束、噪声特性和时序条件的原生门序列。后文讨论的随机基准（randomized benchmarking, RB）和量子体积（quantum volume, QV）等指标，正是围绕这一“线路可执行性”展开的系统级评价工具^[9]。

1.1.3 从 NISQ 到容错量子计算的系统目标

当前量子计算硬件正处于从 NISQ 向容错量子计算过渡的关键阶段。在 NISQ 阶段，变分量子本征求解器（VQE）、量子近似优化算法（QAOA）以及数字量子模拟等方法，为利用有限深度量子线路研究量子化学、组合优化和多体动力学问题提供了初步路径^[6-8]。然而，这些算法的实际表现高度依赖于硬件能否执行足够深且足够稳定的量子线路；因此，面向真实量子处理器的核心问题在于如何在可重复、可校准、可编译的条件下运行高保真度量子线路。

从长远目标来看，容错量子计算要求物理门误差率低于量子纠错码的容错阈值，并在逻辑层面实现随码距增加而指数级下降的误差抑制^[11-12]。近期实验已在离子阱和超导等体系中演示了低于阈值的量子纠错行为，表明“物理门性能 → 逻辑比特性能”的转变正从理论概念走向工程现实^[10,24]。对于尚未进入完整容错阶段的处理器，量子体积等系统级指标提供了一个中间尺度的评价标准：它综合反映门误差、编译效率、串扰、连通性和软件调度等多方面能力，而非仅考量单次门保真度^[9]。这也是本文关注“高保真度寻址量子门线路实现”的出发点——建立连接门级性能与线路级可执行性的完整链路。

1.2 量子计算物理实现与发展现状

1.2.1 主流物理实现路线简述

目前主流的量子计算物理实现路线包括超导量子比特、中性原子阵列、囚禁离子、光子体系以及半导体自旋/固态缺陷等方案。各路线在门速度、相干时间、连通性、工作温度和工程可扩展性方面各具特色，目前尚无公认的主导路线^[25-28]。

超导量子比特与微纳加工工艺兼容，具有门速度快、片上集成度高等优点，是当前量子纠错原型验证最为活跃的平台之一；其主要挑战包括有限的相干时间、复杂的低温电子学以及芯片拓扑对耦合与布线的约束^[10,25]。中性原子平台依托光镊阵列和 Rydberg 相互作用，可在较大规模二维阵列中实现灵活排布与并行操作，在可扩展性方面展现出显著潜力，但高保真度纠缠门、长时间稳定运行和复杂线路编译仍是重要攻关方向^[26,29-30]。光子平台天然适合长距离传输与量子网络，室温运行和集成光子学的兼容性使其在分布式量子计算与量子通信中具有突出优势，但大规模通用量子计算仍受制于确定性两光子逻辑门、低损耗复用以及高质量非高斯资源的制备^[27,31]。半导体自旋与固态缺陷平台具有尺寸小、潜在集成度高以及

与现有半导体工艺兼容等优势，但在大规模互连、均一性控制和低温系统协同方面仍面临较大工程挑战^[28,32-33]。

总体而言，当前量子计算硬件发展的共同趋势已不再是单纯追求更多物理比特数目，而是更加注重在真实误差环境下稳定执行中等复杂度量子线路的能力。

1.2.2 离子阱量子计算的发展路线与挑战

囚禁离子长期以来被视为实现通用量子计算的重要候选路线。其突出优势包括：量子比特天然均一、相干时间长、单比特与两比特门保真度高、可利用集体振动模实现多比特耦合，以及态制备与荧光测量技术相对成熟^[13-15]。

随着研究的深入和规模的扩展，离子阱平台内部也演化出了多种不同的技术路线。在系统扩展架构方面，主要包括：（1）**离子晶体（Ion Crystals）**，利用静态势阱囚禁多离子，通过共用的运动模式实现全连接量子门，这是目前演示高保真度操作和系统级算法最为成熟的底层架构；在一维线性离子链（1D Linear Chain）的基础上，进一步利用特殊设计的射频阱形成二维阵列（2D Ion Crystals），可显著提升比特密度，但对多离子微运动控制与空间局域寻址提出了极高要求^[34-35]；（2）**量子电荷耦合器件（QCCD）架构**，通过复杂的表面微电极阵列控制离子的穿梭（shuttling）、分离与合并，以解决长链的模式拥挤问题，但增加了离子加热控制与时序调度的工程复杂度，同时对电极芯片的设计能力与工艺水平提出了极高的要求^[36-38]。

在量子逻辑门的驱动机制上，主要分为微波（或射频）近场驱动与激光光学驱动。微波方案极大规避了自发辐射带来的退相干，但在微米尺度实现高空间分辨率局域寻址时面临挑战^[39]；激光驱动方案（特别是基于基态超精细能级的远失谐受激 Raman 操控）能够提供强耦合的自旋-运动依赖力，门速度快且易于通过光束偏转实现空间上的个体寻址，是目前实现高保真度多比特纠缠门与可编程量子处理器的核心主流方案^[18,20]。

近年来，离子阱平台不仅在单门保真度方面持续逼近更高水平，也在系统级基准测试和逻辑比特实验中取得了重要进展。可编程离子阱处理器已被用于随机线路基准、量子模拟和逻辑纠错原型验证^[38,40-41]；围绕量子体积、循环基准 (cycle benchmarking) 以及逻辑比特纠错收益的实验结果，使“离子阱能否支撑更复杂量子线路”这一问题得到了更直接的检验。这些进展表明，离子阱平台的研究重点正从早期的单离子和少体物理演示，转向面向系统集成与可扩展控制的量子处理器工程。

1.3 本文研究动机与主要创新点

1.3.1 面向系统级量子线路执行的技术瓶颈

综合考量当前各技术路线在连通性、操控精度与硬件可重构性上的综合表现，本论文选择了“高通光宏观刀片阱 + 一维线性离子链 + 远失谐 Raman 激光操控 + 自由空间个体寻址”作为核心技术路线。“高保真度寻址量子门线路实现”本质上是一个高度复杂的系统工程，要求光学、真空、电学、测控波形与软件调度协同工作。然而，当试图将孤立的物理门推向中等深度量子线路的稳定执行时，实验系统在光学寻址串扰、硬件环境限制以及长时运行漂移等方面暴露出诸多技术瓶颈。结合当前国际代表性离子阱量子计算平台的常规方案，这些瓶颈具体体现在以下三个方面：

(1) **微米级离子间距下，寻址机制的串扰困境与光学几何限制。**在一维离子链中实现局域操作时，必须将操控光紧聚焦到目标离子上（离子间距通常约 $3 \sim 5 \mu\text{m}$ ）。为了获得大数值孔径（NA）以实现强聚焦，许多团队倾向于采用微型化的表面电极阱（Surface trap）^[42]，但这使得离子极度靠近电极表面，引入了严重的反常加热效应（anomalous heating）^[43]，破坏了复杂线路中的运动相干性；而传统的宏观三维金属腔^[44]虽加热率低，却受限于通光孔径，难以兼顾大 NA 聚焦的需求。在具体的寻址机制上，美国马里兰大学（Maryland）团队早期常采用多通道声光调制器（MCAOM）方案^[45]，其光束阵列间距固定，难以灵活适配非均匀的离子排布；随后发展的微机电系统（MEMS）反射镜阵列^[46-47]以及常规的单侧声光偏转器（AOD）寻址（Single-side Addressing, SSA）方案，受限于物理机制，其旁观离子的 Rabi 频率串扰与漏光强度的平方根（ $\sim \sqrt{\epsilon}$ ）成正比。这种平方根放大效应使得在微米尺度下进一步压制串扰面临极大的物理挑战，极易在邻近离子上引入非期望的相干过旋转误差。另一方面，奥地利因斯布鲁克（Innsbruck）团队展示的交叉 AOD 寻址方案^[48]虽然提高了位置重构的灵活性，但多音频驱动容易产生高阶互调失真（IMD）与伴生频移光束，带来了额外的噪声通道。

(2) **多模系统高保真操控对底层物理测控环境的严苛要求。**随着一维链中离子数目的增加，集体振动模数量线性增长，导致两比特 MS 门的参数窗口极度变窄，对硬件环境的稳定性提出了极其苛刻的要求。Raman 操作的有效 Rabi 频率与门失谐，高度依赖于激光光强、离子位置以及势阱频率的恒定。然而，常规的商用射频（RF）与直流（DC）源通常存在不可忽视的低频漂移与电学噪声，且实验平台微小的温度和磁场波动都会直接转化为离子径向运动的抖动和模式频率的漂移。这些底层物理环境的微小不稳定性，会使得精心标定的纠缠门参数在数十分钟内迅速失效，导致深量子线路中的相干与退相干误差显著加剧，成为制约系统长时稳定运行的核心物理瓶颈。

(3) **物理门向自动化系统调度的软硬件断层与误差累积。**演示单个高保真度门与在随机量子线路中持续调用该门面临截然不同的误差环境。在深量子线路中, AOM 功率波动、交流斯塔克频移 (AC Stark shift) 累积、激光相位噪声、红蓝边带不平衡以及离子位置的缓慢漂移, 都会迅速破坏门间的相位一致性, 导致相干误差与声子退相干效应迅速累加为破坏性极强的相关误差^[49-50]。由于缺少涵盖参数标定、漂移补偿、门间相位连续拼接与底层时序的自动化编译框架, 常规的静态校准和开环执行方式会导致实际线路的执行保真度远低于单次物理门的理论预期, 难以支撑如量子体积 (QV) 这类高复杂度基准测试的稳定运行^[9]。

1.3.2 本文的解决思路、技术进步与创新优势

针对上述常规方案在走向系统级应用时面临的技术问题, 本文围绕“硬件平台构筑—低串扰寻址—高保真量子门—系统级线路验证”的目标开展系统研究, 形成了从底层硬件构筑到系统级线路验证的技术链路。本文的主要技术进展可概括为以下三个方面:

第一, 利用高通光平台提供的几何光学条件, 设计并实现对称双侧 AOD (DSA) 寻址架构, 以降低常规单侧寻址中的串扰水平。紧凑的高通光玻璃腔与宏观刀片阱一体化设计是课题组前期取得的重要平台成果^[51], 该平台在保持较低反常加热率的同时, 提供了较大的光学访问条件。基于该几何条件, 本文设计了基于对称声光偏转器的双侧寻址 (DSA) 光路。相较于定距的多通道 AOM 方案以及容易产生寄生光束的交叉 AOD 方案, 该架构利用反向传播的紧聚焦光斑在目标离子处重合, 在对称构型下可抵消 AOD 带来的位置相关频移; 同时, 可将旁观离子的 Rabi 频率串扰由单侧寻址的平方根标度 ($\sim \sqrt{\epsilon}$) 降低为线性标度 ($\sim \epsilon$)。实验表明, 该系统在 $5.5 \mu\text{m}$ 的常规离子间距下, 将 Rabi 频率串扰抑制在 1.19×10^{-3} 量级^[16]。

第二, 构建了低噪声、高稳定度的电学与环境控制系统, 为长时间门标定与量子线路运行提供硬件条件。高保真门与可重复量子线路的实现除光学架构外, 还依赖底层电学与环境控制的稳定性。针对长时间线路运行中环境漂移与控制噪声带来的影响, 本文开展了电学与温控系统的设计与实现: 研制了基于螺旋谐振腔与反馈控制的低噪声射频 (RF) 机箱, 使得射频功率稳定度在长达 13 小时内达到 28 ppm; 开发了 ppm 级精度的高稳多通道直流 (DC) 偏置机箱; 构建了双级主动水冷温控环境, 将数天内的温度波动控制在 0.04°C 以内, 并集成了双层磁屏蔽系统与多波长稳频激光链路。上述底层硬件与环境控制措施降低了系统噪声并提升了长时间运行的可重复性, 为复杂的系统级实验提供了工程支撑。在此基础上, 本文对远失谐 Raman 操作中的 AC Stark shift、相空间不闭合与红蓝边带不平衡等复合误差进行了系统标定与补偿, 使单比特 Raman 门与两比特 MS 门的平均保真度分别达到 99.986(2)% 和 99.48(23)%。

第三，构建分层编译与运行时校准框架，使门级能力能够在多比特量子线路中可重复调用并用于系统级验证。针对长线路中的参数漂移与相位失配问题，本文开发了一套支持门序列相位连续拼接、AC Stark shift 运行时标定补偿以及线性复杂度状态更新的分层测控编译框架。在该软硬件协同流程下，本系统完成了 5 比特 GHZ 纠缠态制备 (97.0(6)%)，并稳定执行了包含大量两比特逻辑门的深度随机线路，通过了 Quantum Volume 32 (QV32) 系统级基准测试。相关结果表明，该框架有助于抑制由门间相位失配与参数漂移引起的误差累积，并将门级指标进一步映射到线路级性能评估。

1.3.3 系统建设路线

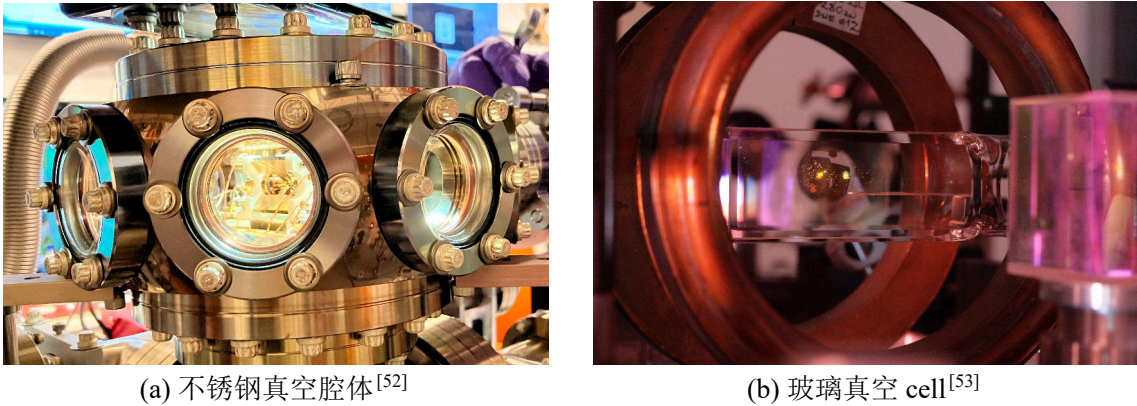


图 1.3 传统不锈钢腔体与玻璃真空 cell 在通光条件上的直观对比。前者主要通过有限数量的窗片提供光学访问，后者则在更大立体角内为成像、寻址和多束光布局提供空间。

围绕上述目标，本文的研究主线可概括为三层递进关系。第一，面向高保真度量量子门实现的需求，在高通光离子阱上完成真空、电学、激光、成像与测控等硬件系统的设计与搭建，构建基础功能完整、性能水平高的离子阱量子计算平台。第二，利用高通光平台的大数值孔径和多方向光路布局优势，设计并实现低串扰 Raman 寻址光路，将几何优势转化为高保真度的单比特与两比特门操控能力。第三，将高保真原生门与测控软件栈相结合，把门级能力提升为量子线路能力，并通过 5 比特 GHZ 态制备和 QV32 验证对系统整体水平进行检验。

1.4 论文章节安排

全文各章节的主要内容安排如下。

第 2 章：高通光离子阱与离子捕获。介绍高通光刀片离子阱、真空腔体以及射频与直流电子学系统的设计与实现，分析离子链模型、微运动机制及其补偿方法，并通过基础测试验证平台的囚禁与通光性能，为后续量子比特操控提供硬件基础。

第 3 章： $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控理论。围绕 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细量子比特，系统介绍能级结构、冷却与初态制备、微波驱动下的 Rabi 与 Ramsey 理论，以及荧光探测与 SPAM 误差模型，为实验系统搭建和数据分析建立理论框架。

第 4 章： $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控实验实现。给出基础光路、成像系统、微波链路以及相关稳频和环境控制方案的实验实现，并通过冷却、抽运、微波 Rabi/Ramsey 和光子计数直方图等实验，对平台的基础操控能力进行表征。

第 5 章：基于 Raman 操作的离子量子门理论。建立远失谐 Raman 驱动与 MS 门的理论模型，分析单比特门和两比特门的主要误差来源，并讨论多离子链中的门波形调制方法，为后续实验中的参数选择和误差预算提供理论依据。

第 6 章：高保真度量子门实验实现。重点介绍超远失谐 Raman 激光系统与基于 AOD 的低串扰寻址光路，在实验上实现并表征单比特 Raman 门和两比特 MS 门，并结合随机基准和误差标定分析，给出门保真度与误差来源的系统结果。

第 7 章：量子线路实验验证。在前述高保真原生门基础上，进一步介绍量子线路编译、系统参数校准与测控软件框架，完成 5 比特 GHZ 态制备，并通过 QV32 对系统级量子线路执行能力进行验证。

第 8 章：总结与展望。总结本文在高通光平台搭建、低串扰寻址、量子门误差分析、高保真度单/双比特门实现以及系统级量子线路验证等方面的主要结果，并讨论离子阱量子计算在高保真门、二维晶体、QCCD 与容错量子计算方向上的后续发展。

综上，本文从实验平台构建出发，围绕“离子阱硬件平台构筑—低串扰寻址高保真量子门—系统量子线路验证”这一主线，给出了一条较为完整的离子阱量子计算系统实现路径。后续章节将依次展开详细论述。

第 2 章 高通光离子阱与离子捕获

实现高保真度寻址量子门，首先要求囚禁平台能够为多离子链提供稳定、低噪声且光学访问充分的实验环境。对于以 Raman 操控和并行荧光探测为核心手段的 $^{171}\text{Yb}^+$ 平台而言，寻址光束的聚焦质量、入射角度自由度和荧光收集效率直接决定了串扰水平与读出保真度；而径向约束强度、轴向势阱可调性与振动模谱结构，则从冷却极限、Lamb–Dicke 参数和多模解耦等层面约束了两比特门的参数窗口与最终保真度。因此，刀片电极、真空腔体、电学驱动与光学访问必须作为一个整体进行协同设计^[13,36,51]。

本章围绕高通光刀片离子阱系统，按照“Paul 阱理论模型—装置实现—实验表征”的顺序展开^[18,54-55]。第一节给出后续实验所需的单离子与多离子链运动模型，并引入额外微运动及其补偿需求；第二节介绍刀片电极结构、高通光真空腔体以及与之匹配的射频、直流驱动系统；第三节通过几何尺寸测量、谐振腔带载测试、射频/直流稳定性测试、单/多离子捕获以及额外微运动补偿实验，对装置基础性能进行评估，为后续 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特操控与量子门实验提供硬件基础。

2.1 Paul 阱中的离子运动模型

本节从线性 Paul 阱的经典模型出发，推导单离子在 RF 与 DC 场中的运动方程，进而给出多离子链的平衡位置、线性化振动模和量子化表达。振动模频率与模式矩阵不仅决定了 EIT/边带冷却的目标模式，也直接进入后续 Mølmer–Sørensen 门的相空间设计与多模解耦条件。随后讨论额外微运动的来源及其对囚禁和冷却的不利影响，以阐明装置搭建完成后为何必须进行补偿。

2.1.1 线性 Paul 阱模型与离子运动模型

(1) 电势近似与运动方程：在阱中心附近（离子位移远小于电极特征尺度）可将电势展开到二次项。将总电势写成 DC 与 RF 两部分之和：

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{dc}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{rf}}(\mathbf{r}) \cos \Omega_{\text{rf}} t, \quad (2.1)$$

其中 Ω_{rf} 为 RF 角频率。对典型线性四极结构，在中心附近保留主导的二次项，可写为（忽略常数项）：

$$\Phi_{\text{rf}}(\mathbf{r}) = \frac{V_{\text{rf}}}{2r_0^2} (x^2 - y^2), \quad (2.2)$$

$$\Phi_{\text{dc}}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa U_{\text{dc}}}{2z_0^2} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad (2.3)$$

其中 V_{rf} 为 RF 峰值电压, U_{dc} 为产生轴向约束的等效 DC 电压, r_0 与 z_0 分别表征径向与轴向几何尺度, κ 为与端帽/分段电极几何相关的比例因子^[18,56]。由 $\mathbf{F} = -Q\nabla\Phi$ 得到单离子 (质量 m 、电荷 Q) 在三个方向的运动方程:

$$\ddot{x} + \left[-\frac{Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2} + \frac{QV_{\text{rf}}}{mr_0^2} \cos \Omega_{\text{rf}} t \right] x = 0, \quad (2.4)$$

$$\ddot{y} + \left[-\frac{Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2} - \frac{QV_{\text{rf}}}{mr_0^2} \cos \Omega_{\text{rf}} t \right] y = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{z} + \frac{2Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2} z = 0. \quad (2.6)$$

可见在理想线性阱中, 轴向 z 不受 RF 直接驱动, 而径向由 RF 场提供动态约束。

(2) Mathieu 方程: 引入无量纲时间 $\tau = \Omega_{\text{rf}} t/2$, 则 $\frac{d^2}{d\tau^2} = (\Omega_{\text{rf}}^2/4) \frac{d^2}{dt^2}$, 并将式 (2.4) 写为标准 Mathieu 形式:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (a_x - 2q_x \cos 2\tau) x = 0, \quad (2.7)$$

其中参数定义为:

$$a_x = a_y = -\frac{4Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2 \Omega_{\text{rf}}^2}, \quad a_z = +\frac{8Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2 \Omega_{\text{rf}}^2}, \quad q_x = -q_y = -\frac{2QV_{\text{rf}}}{mr_0^2 \Omega_{\text{rf}}^2}, \quad q_z \simeq 0. \quad (2.8)$$

由于 q 的符号仅对应坐标轴之间的相位选择, 稳定性与低阶近似主要由 q^2 决定, 后续推导中常以 $|q_x| = |q_y| \equiv q_r$ 表示径向 RF 参数的幅值^[18,56]。当 $|a_u| \ll 1$ 且 $|q_u| \ll 1$ 时, Mathieu 解可用“慢快分离”近似表示为^[18]:

$$x(t) \approx X \cos(\omega_x t + \varphi) \left[1 + \frac{q_x}{2} \cos \Omega_{\text{rf}} t \right], \quad (2.9)$$

其中括号外的缓慢项是久期运动 (secular motion), 括号内的快速调制项对应与 RF 同步的本征微运动 (intrinsic micromotion)。由标准近似可得久期角频率:

$$\omega_u \approx \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} \sqrt{a_u + \frac{q_u^2}{2}} \quad (u = x, y), \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2Q\kappa U_{\text{dc}}}{mz_0^2}}. \quad (2.10)$$

(3) 多离子哈密顿量与平衡结构: 考虑同种离子在三维谐振势中的 N 离子体系。在赝势近似下, 经典势能可写为:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} (\omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2) + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.11)$$

当径向约束满足 $\omega_{x,y} \gg \omega_z$ 时, 最低能量构型为沿 z 轴排列的线性离子链 ($x_i = y_i = 0$)。此时 $r_{ij} = |z_i - z_j|$, 平衡位置 $\{z_i^{(0)}\}$ 由 $\partial U / \partial z_i = 0$ 给出:

$$m\omega_z^2 z_i^{(0)} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{z_i^{(0)} - z_j^{(0)}}{|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|^3} = 0. \quad (2.12)$$

引入特征长度

$$\ell \equiv \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m \omega_z^2} \right)^{1/3}, \quad u_i \equiv z_i^{(0)}/\ell, \quad (2.13)$$

则式 (2.12) 可化为无量纲形式:

$$u_i - \sum_{j \neq i} \frac{u_i - u_j}{|u_i - u_j|^3} = 0, \quad (2.14)$$

该方程可数值求解得到离子间距随链长与 ω_z 的标度关系^[18,57]。

(4) 小振动近似与模式矩阵: 令 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^{(0)} + \delta \mathbf{r}_i$, 在平衡位置附近对势能 (2.11) 做二阶展开。一阶项 $\sum_i (\partial U / \partial z_i)_0 \delta z_i$ 在平衡条件 (2.12) 下为零, 因此保留到二阶即可得到小振动的线性化动力学。以轴向为例, 对任意一对离子 (i, j) 的库仑对势 $U_{ij} = Q^2 / (4\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|)$, 其二阶导数满足:

$$\left. \frac{\partial^2 U_{ij}}{\partial z_i^2} \right|_0 = \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 |z_{ij}^{(0)}|^3}, \quad \left. \frac{\partial^2 U_{ij}}{\partial z_i \partial z_j} \right|_0 = -\frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 |z_{ij}^{(0)}|^3} \quad (i \neq j), \quad (2.15)$$

从而库仑相互作用在二阶近似下产生耦合矩阵 (Hessian)^[57]:

$$\delta \ddot{z}_i + \omega_z^2 \sum_{j=1}^N A_{ij} \delta z_j = 0, \quad (2.16)$$

其中:

$$A_{ii} = 1 + 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{|u_i - u_j|^3}, \quad A_{ij} = -\frac{2}{|u_i - u_j|^3} \quad (i \neq j). \quad (2.17)$$

对径向 x (或 y) 方向, 需要对 $1/r_{ij}$ 在 $x_{ij} = x_i - x_j$ 的二阶项展开:

$$\frac{1}{\sqrt{(z_{ij}^{(0)})^2 + x_{ij}^2}} \simeq \frac{1}{|z_{ij}^{(0)}|} - \frac{x_{ij}^2}{2|z_{ij}^{(0)}|^3} + \dots, \quad (2.18)$$

从而得到:

$$\delta \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^N [\omega_x^2 \delta_{ij} - \omega_z^2 C_{ij}] \delta x_j = 0, \quad C_{ii} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{|u_i - u_j|^3}, \quad C_{ij} = -\frac{1}{|u_i - u_j|^3} \quad (i \neq j). \quad (2.19)$$

注意到 $A = I + 2C$, 因此轴向与径向的耦合矩阵共享同一组本征矢。设 A 的本征方程为 $\sum_j A_{ij} b_{j,k} = \lambda_k b_{i,k}$, 并取正交归一化 $\sum_i b_{i,k} b_{i,k'} = \delta_{kk'}$, 则轴向第 k 个模式频率为:

$$\omega_{z,k} = \omega_z \sqrt{\lambda_k}, \quad (2.20)$$

径向频率则可写为

$$\omega_{x,k} = \sqrt{\omega_x^2 - \frac{\omega_z^2}{2} (\lambda_k - 1)}, \quad \omega_{y,k} = \sqrt{\omega_y^2 - \frac{\omega_z^2}{2} (\lambda_k - 1)}. \quad (2.21)$$

其中 $\lambda_1 = 1$ 对应轴向质心 (COM) 模, 使得径向 COM 模满足 $\omega_{x,1} = \omega_x$ 。随着离子数增加或径向约束减弱, 离子结构将朝之字形 (zigzag) 结构相变, 其临界行为可用线性化谱分析与 Landau 理论刻画^[58-60]。

(5) 量子化与 Lamb-Dicke 参数: 将模式坐标定义为

$$\delta z_i = \sum_k b_{i,k} Q_{z,k}, \quad \delta x_i = \sum_k b_{i,k} Q_{x,k}, \quad (2.22)$$

并将每个模量子化为独立谐振子:

$$Q_{\alpha,k} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\alpha,k}}} (a_{\alpha,k} + a_{\alpha,k}^\dagger), \quad H_{\text{mot}} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_k \hbar \omega_{\alpha,k} \left(a_{\alpha,k}^\dagger a_{\alpha,k} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

当用波矢差 $\Delta \mathbf{k}$ 的激光场耦合内态与运动时, 第 i 个离子在模 (α, k) 上的 Lamb-Dicke 参数为^[18,57]:

$$\eta_{i,\alpha,k} = (\Delta \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha) b_{i,k} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\alpha,k}}}, \quad (2.24)$$

其刻画了离子基态运动波包与电磁场的耦合强度。

2.1.2 额外微运动及补偿需求

(1) 本征微运动与额外微运动: 由 Mathieu 近似解 (2.9) 可见, 即使离子处于 RF 零场点, 只要存在久期运动振幅 X , 也会伴随幅度约为 $(q/2)X$ 的本征微运动。对本章后续实验而言, 更关键的是当离子的平均位置偏离 RF 零场点时所产生的额外微运动 (excess micromotion, EMM)。令离子静态位移为 x_0 , 则运动可写成:

$$x(t) \approx X \cos(\omega_x t + \varphi) \left[1 + \frac{q_x}{2} \cos \Omega_{\text{rf}} t \right] + \frac{q_x}{2} x_0 \cos \Omega_{\text{rf}} t. \quad (2.25)$$

其中最后一项就是与平均位移直接相关的 EMM。它通常由杂散 DC 电场、补偿电极偏置不当, 或 RF 电极相位/装配不对称引起; 与本征微运动不同, EMM 不能通过常规激光冷却有效消除, 因此必须依靠外加补偿场将离子重新推回 RF null 附近^[18,54]。

在赝势近似下, 静态平衡位移与杂散场之间满足:

$$x_0 \simeq \frac{QE_{\text{stray}}}{m\omega_x^2}, \quad (2.26)$$

因此, 提高径向束缚频率、减小杂散场以及对补偿电极施加合适偏置, 都是降低 EMM 的直接手段。对线性离子阱而言, 这一关系也说明了后续实验中通过扫描补偿电压来寻找最优工作点的物理依据^[54]。

(2) EMM 的主要实验后果: 若激光波矢在微运动方向上的投影为 k , 则光-离子相互作用中会出现相位调制项:

$$e^{iku(t)} = e^{iku_{\text{sec}}(t)} e^{i\beta \cos(\Omega_{\text{rf}} t)}, \quad \beta \equiv k u_{\text{amp}}^{(\text{EMM})}, \quad (2.27)$$

其中 β 为微运动调制指数。该调制会在载波两侧产生以 Ω_{rf} 为间隔的微运动边带，并削弱载波耦合强度。其直接后果是：谱线会发生展宽或畸变，Doppler 冷却效率下降，离子对 RF 技术噪声更为敏感，从而抬升运动温度或加热率，并进一步影响后续 Raman 寻址的载波-边带分辨能力与多比特门的保真度稳定性^[18,54]。

因此，离子在被成功捕获之后，还必须进一步进行微运动补偿，才能进入适合后续量子操控的工作状态。下一节将介绍高通光离子阱及其配套 RF/DC 装置的实现，第三节再通过单离子捕获和参数激发实验给出补偿流程与实验结果。

2.2 高通光离子阱装置实现

在建立了 Paul 阱中的离子运动模型之后，下面转入装置实现部分。本系统选择高通光刀片阱作为实验平台，其核心目标并不是单纯扩大通光孔径，而是在保证阱深度、势场稳定性与长期可维护性的前提下，为 RF 赝势、DC 约束、真空环境以及多方向光学访问同时预留足够空间，从而满足后续低串扰 Raman 寻址和高效率荧光探测的几何需求。本节将依次介绍与阱芯配套的高通光真空腔体、螺旋谐振腔、RF 稳定系统和高稳直流源等关键子系统，说明它们如何共同构成多离子链囚禁与量子门实验所需的实验环境^[51,61-63]。

2.2.1 刀片与高通光真空腔体

在囚禁离子量子计算中，激光冷却、Raman 寻址量子门与并行荧光探测均需要多束激光从不同方向入射，同时要求使用高数值孔径（NA）的成像物镜以提升光子收集效率和态判别保真度。相比传统圆柱/杆状电极，刀片式电极（blade electrodes）将电极材料主要分布在四个薄片上，在阱中心附近提供近似四极场的同时，显著扩大了横向与竖直方向的通光锥角，因此成为高通光离子阱方案中的常见选择^[61-62,64]。从工程实现看，刀片阱通常由两片 RF 刀片与两片 DC/地刀片交错构成，电极前缘加工为圆角以降低放电风险并改善场均匀性；轴向约束则由端帽电极或分段 DC 电极提供，以实现离子链定位、势阱形状调节以及后续的离子分裂/合并操作^[13,44]。

本工作实际使用如图2.1所示的五段刀片阱，高通光离子阱的电极、陶瓷柱组件与真空主体制作和装调，主要由课题组前期工作完成，更详细的工艺步骤与装配过程可参见文献^[65-66]。

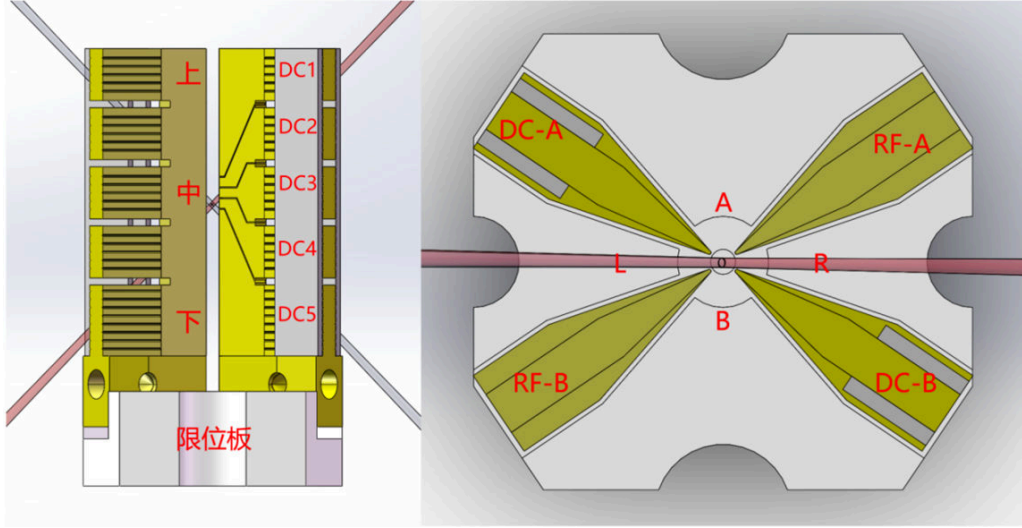


图 2.1 刀片组经限位板组装至陶瓷柱上，左侧为正视图，右侧为俯视图

本工作采用紧凑玻璃 cell 与刀片阱一体化设计，用以替代体积较大的金属真空腔体。这样做的直接收益是：离子到四周外表面的距离可以压缩到厘米量级，从而为多方向高 NA 物镜、斜向光束与轴向光束同时布置留出空间。图 2.2 给出了实际使用的高通光离子阱电极与玻璃 cell 实物照片，更完整的装置设计可参见文献[51,66]。

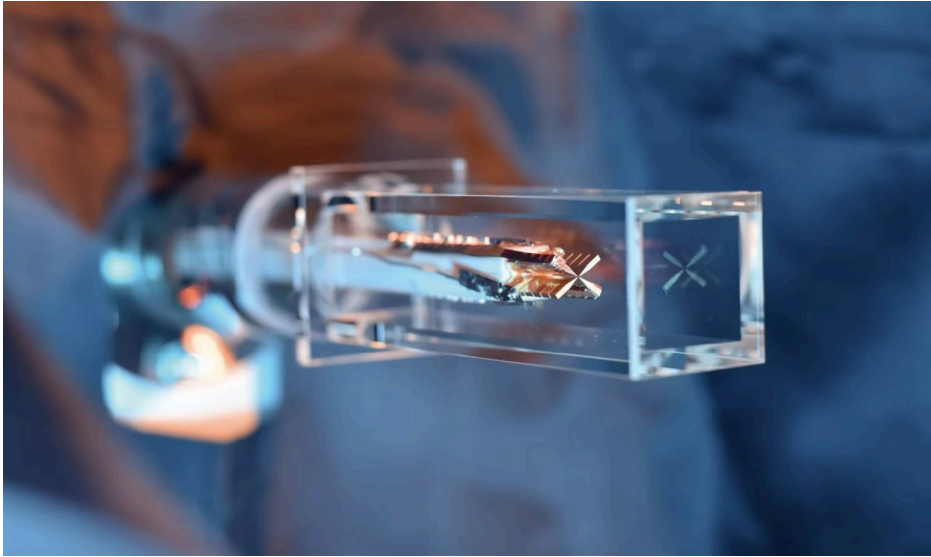


图 2.2 高通光真空腔体实物图

2.2.2 螺旋谐振腔 (Helical resonator)

离子阱正常工作时，需要在 RF 电极上加载高幅值、低噪声且频率稳定的射频信号，同时还要通过独立 DC 通道对分段电极施加静电偏置。在实验上，我们首先通过 FPC 和导线，将 RF 与 DC 电极分别引至真空腔馈通处；随后，RF 馈通经螺旋谐振腔外接射频机箱加载 RF 信号，DC 馈通经滤波后外接直流源机箱加载 DC

信号^[67-68]。

由于阱电极与真空馈通在射频下主要表现为电容负载，若直接以 $Z_0 = 50 \Omega$ 信号源驱动，容易出现阻抗失配，从而带来较大的反射功率、额外噪声注入以及功率放大器过载风险。螺旋谐振腔通过“屏蔽筒 + 螺旋主线圈”的结构形成高 Q 值谐振网络，并利用天线线圈的感应耦合实现阻抗变换与电压增益；其在共振附近的窄带特性还可作为射频噪声的带通滤波器，因此能够在较小输入功率下获得稳定且低噪声的高压 RF 驱动^[63,69]。

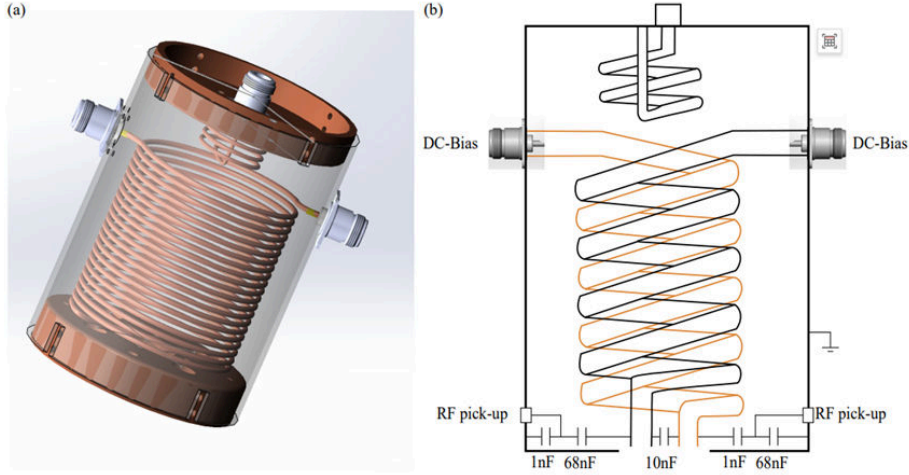


图 2.3 螺旋谐振腔模型图，图源^[67]

图 2.3 给出了螺旋谐振腔的等效模型，其中 RF pick-up 为取样电容，用于提取输入端电压并供后续射频稳定反馈使用；DC-Bias 则用于在 RF 电极上叠加偏置电压，以补偿微运动或微调径向声子频率。

(1) **阻抗匹配与谐振频率 ω_0** : 螺旋谐振腔通常采用两回路模型：天线线圈（电感 L_1 ）与主线圈（电感 L_2 ）空间上相互耦合，形成互感 $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ （ k 为耦合系数）。设主线圈端口连接等效负载阻抗 Z_L （包含离子阱、电缆与馈通等），在相量域中两回路的基尔霍夫电压方程可写为^[63]

$$V_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2, \quad (2.28)$$

$$V_2 = i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1. \quad (2.29)$$

由于负载跨接在主线圈端口上，可取符号约定 $V_2 = -Z_L I_2$ ，代入式 (2.29) 得：

$$(Z_L + i\omega L_2)I_2 + i\omega M I_1 = 0 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega M}{Z_L + i\omega L_2}. \quad (2.30)$$

将式 (2.30) 代回式 (2.28)，即可得到信号源看到的输入阻抗：

$$Z_{in} \equiv \frac{V_1}{I_1} = i\omega L_1 + i\omega M \frac{I_2}{I_1} = i\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2 + Z_L}. \quad (2.31)$$

实验上通常通过改变天线线圈的几何尺寸或位置（从而调节 L_1 与 M ），使工作频率处 $\text{Re}(Z_{in}) \approx Z_0$ ，从而实现阻抗匹配并最小化反射功率。

在离子阱常用频段，螺旋谐振腔的物理尺寸通常远小于自由空间波长，因此可将主线圈与总电容近似为集总元件网络。将主线圈等效为电感 L_c （含损耗等效串联电阻 R_Σ ），并把线圈自电容 C_c 、线圈—屏蔽壳电容 C_s 、连线/馈通杂散电容 C_w 以及阱电容 C_t 合并为：

$$C_\Sigma = C_t + C_w + C_s + C_c. \quad (2.32)$$

若把整体视为串联 LCR 回路，其阻抗可写为：

$$Z(\omega) = R_\Sigma + i \left(\omega L_c - \frac{1}{\omega C_\Sigma} \right). \quad (2.33)$$

由谐振条件（虚部为零）可得射频共振角频率：

$$\omega_0 L_c - \frac{1}{\omega_0 C_\Sigma} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_c C_\Sigma}}. \quad (2.34)$$

(2) 品质因子 Q 与 RF 电压：品质因子可定义为

$$Q \equiv \omega_0 \frac{U}{P_{\text{loss}}},$$

其中 U 为谐振时储能， P_{loss} 为平均耗散功率。以串联 LCR 电路为例，在谐振稳态下，储能在电感与电容之间周期性交换，总储能等于电感磁场能量的最大值，也等于电容电场能量的最大值；另一方面，回路中等效串联电阻上的平均耗散功率可独立写为：

$$U = \frac{1}{2} L_c I_{\text{peak}}^2.$$

$$P_{\text{loss}} = \frac{1}{2} R_\Sigma I_{\text{peak}}^2,$$

故：

$$Q = \frac{\omega_0 L_c}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C_\Sigma R_\Sigma} = R_\Sigma^{-1} \sqrt{\frac{L_c}{C_\Sigma}}. \quad (2.35)$$

实验上常通过共振曲线的半功率带宽 $\delta\omega_0$ 提取加载品质因子：

$$Q_L = \frac{\omega_0}{\delta\omega_0}.$$

若采用透射测量，可直接用 3 dB 带宽近似，而若采用单端口反射 S_{11} 测量，则需结合耦合条件或拟合 S_{11} 数据进行提取。

而螺旋谐振腔最重要的作用之一，是将有限的输入功率转化为阱端的高幅值 RF 电压。谐振时电容与电感两端的电压幅值相等。由：

$$V_L(t) = L_c \frac{dI}{dt} = L_c \omega_0 I_{\text{peak}} \cos(\omega_0 t), \quad (2.36)$$

可知峰值电压满足：

$$V_{\text{peak}} \approx \omega_0 L_c I_{\text{peak}}. \quad (2.37)$$

另一方面，输入功率（亦为耗散功率）为 $P = \frac{1}{2} R_{\Sigma} I_{\text{peak}}^2$ 。消去 I_{peak} 并利用式 (2.35) 得^[63]：

$$V_{\text{peak}} \approx \left(\frac{L_c}{C_{\Sigma}} \right)^{1/4} \sqrt{2PQ}, \quad V_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{peak}}}{\sqrt{2}} \approx \left(\frac{L_c}{C_{\Sigma}} \right)^{1/4} \sqrt{PQ}. \quad (2.38)$$

这些关系为谐振腔的结构设计、功率预算和带载测试提供了直接的估算依据。

2.2.3 射频机箱与功率稳定

线性 Paul 阱利用 RF 电场在径向方向产生赝势，而多段 DC 电极提供轴向束缚与补偿电场。对于给定阱结构与驱动频率，RF 幅度和相位波动会直接转化为囚禁势的时变扰动，引起附加微运动、振动模频率漂移和运动加热，这些效应最终作为两比特门误差预算中的重要分量降低量子门保真度^[54-55]。组内前期系统工作表明，在离子阱 RF 链路中分别实现幅度稳定以及幅度/相位同时稳定后，离子径向运动态的声子相干时间可从约 1.28 ms 提升到 39.1 ms 乃至 60.6 ms，说明 RF 稳定度对后续量子操控具有决定性影响^[68]。

(1) RF 射频机箱：基于^[68]原理，本工作设计并使用了如图 2.4 和图 2.5 所示的射频机箱。

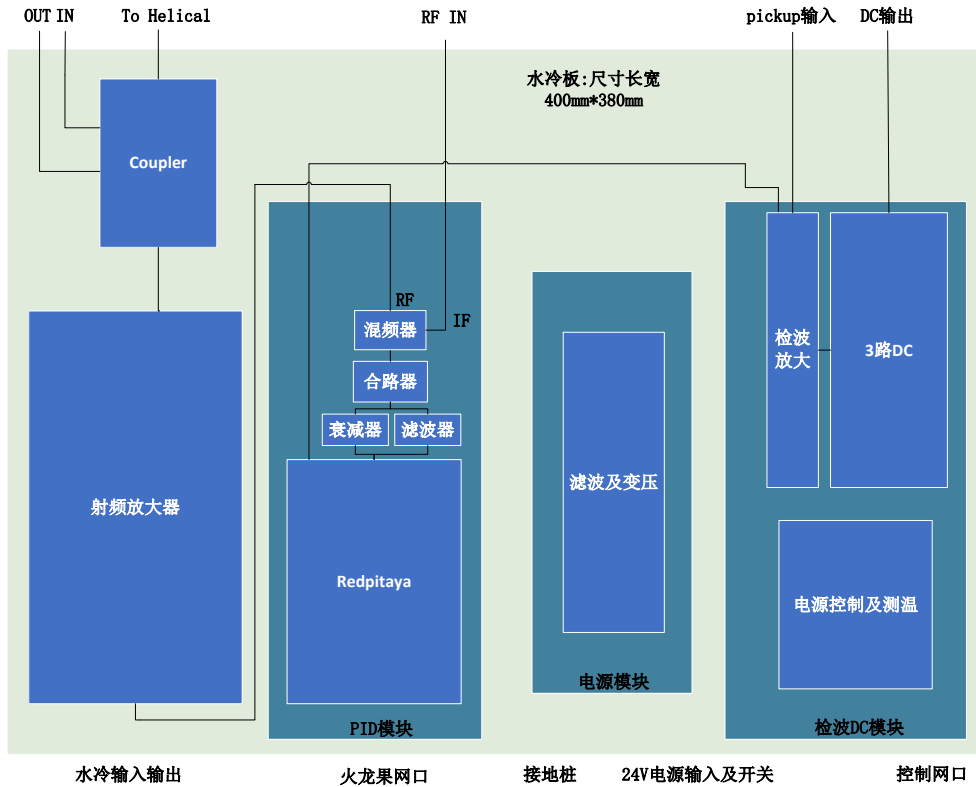


图 2.4 RF 机箱原理图

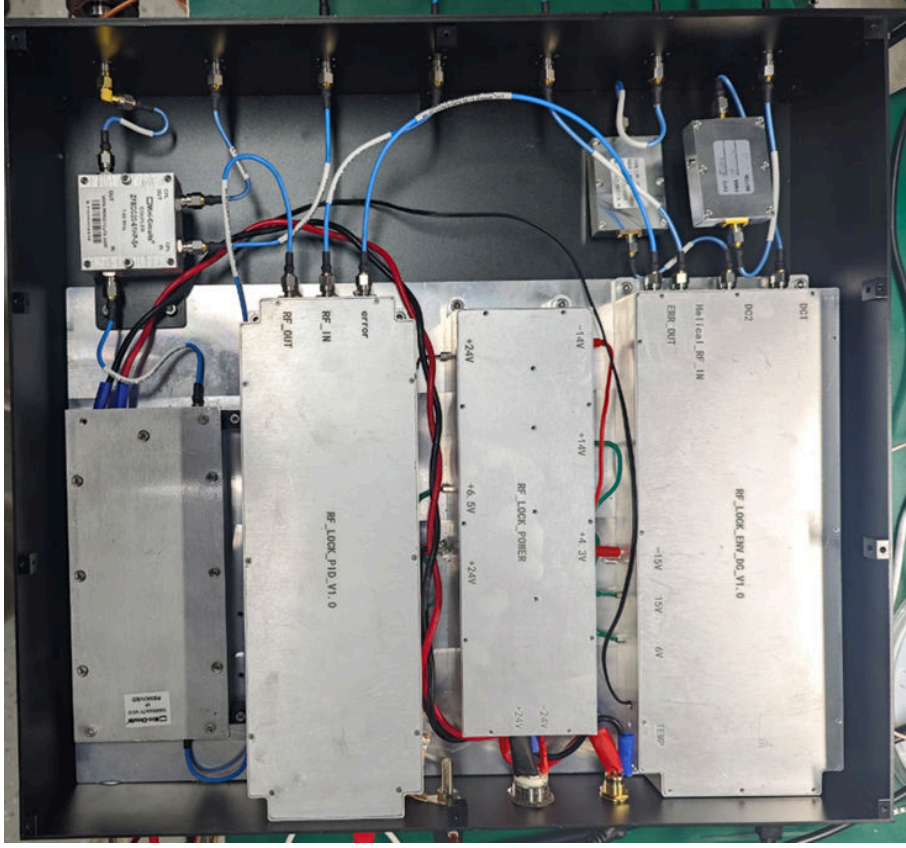


图 2.5 RF 机箱实物图

该机箱将射频输入、伺服调制、功率放大、耦合采样、检波、PID 控制与电源管理等功能集成于单机箱。如图 2.4 所示，信号源从 RF_IN 输入后进入 PID 模块（含 Red Pitaya、混频器、10 kHz 低通、30 dB 衰减与合路器），其输出驱动功放（带水冷接口）；功放后接定向耦合器提供 CIN/COU 采样口，并通过 RFout-Helical 接口连接螺旋谐振腔。与此同时，拾取信号送入检波放大模块产生两路 DC 输出，并预留三路辅助 DC 与电源控制、温度采集通道。

针对集成机箱易受电磁串扰与地环路影响的问题，我们采取了若干屏蔽与接地优化措施：电源、PID 与检波/DC 三块板卡分别置于独立屏蔽腔体中，模块间通过同轴线缆与馈通电容连接；模拟与数字部分采用压块隔离，并对三路 DC 输出按功能分区；一体化 PCB 减少飞线，关键信号地通过过孔阵列强化回流路径，并将各模块固定在水冷底板形成低阻抗公共地，机箱后部设置接地螺柱实现单点接地。这些设计主要用于抑制 UPS 纹波与功放噪声耦合到误差信号链路中。

(2) RF 功率稳定：螺旋谐振腔在 RF 链路中承担阻抗匹配、电压增益与带通滤波三项关键作用^[63]。其高 Q 值一方面有利于抑制带外噪声，另一方面也使输出幅度与相位对共振频率漂移十分敏感。在 $\omega \rightarrow \omega_0$ 附近，相位对共振频率的变化率满足：

$$\frac{d\phi}{d\omega_0} \approx \frac{2Q}{\omega_0}, \quad (2.39)$$

因此温度与负载变化引起的 ω_0 漂移会被显著放大为相位波动，并伴随幅度增益变化。为在长时间实验中保持阱 RF 幅度恒定，如图 2.6 所示，我们引入“采样—误差—反馈”的闭环：利用定向耦合/拾取端对阱 RF 进行弱耦合采样，经二极管检波与低通滤波获得与 RF 幅度成正比的低频电压；将该电压与高稳定设定值比较得到误差信号；最后通过 PID 调节射频前级（如混频/衰减控制端或可调谐元件），使系统工作点锁定在目标幅度附近。为避免参考端漂移导致“锁到漂移”，系统采用高稳定基准与高分辨率 DAC 提供设定值——基于 LTZ1000 高稳直流参考源，使用 AD5791 构建高精度标准电压源，并配合低噪声放大与滤波实现 ppm 量级设定分辨率和 $1\ \mu\text{V}$ 量级误差测量分辨率；本工作机箱的伺服控制器采用 Red Pitaya 平台，并通过 PyRPL 实现 PID 算法和在线参数整定。

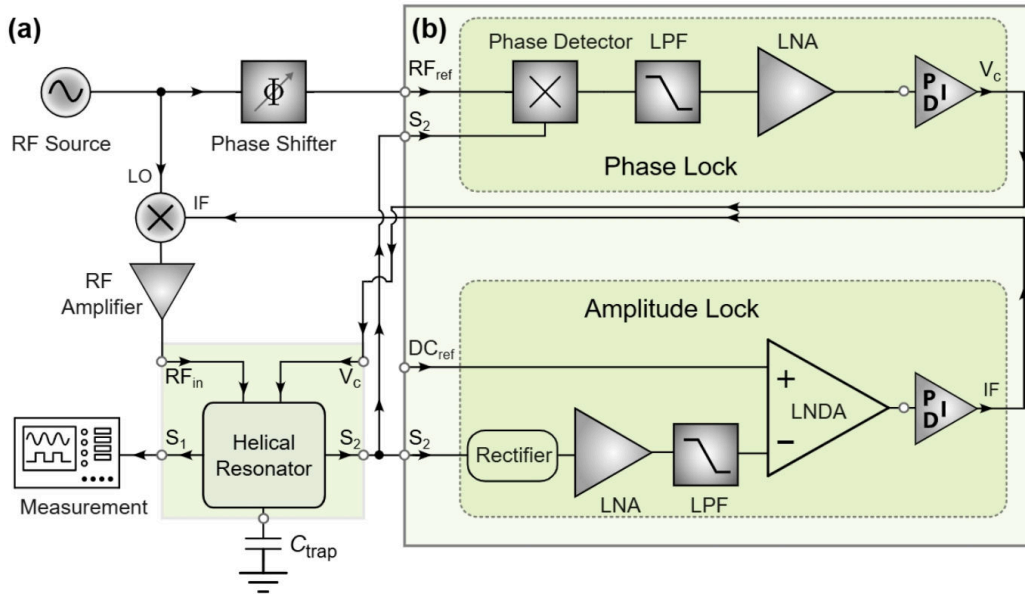


图 2.6 RF 功率稳定原理图，图源^[68]

2.2.4 高稳直流源机箱

直流电极电压决定离子阱轴向势阱形状、离子链位置与间距，以及补偿电场（如微运动补偿、漂移校正等），其噪声与漂移会直接耦合到离子所处的静电势环境，进而影响离子链间距、轴向模式频率及微运动补偿的有效性。为在电极端获得尽可能低的噪声，需要对直流源输出实施较窄带宽的低通滤波；带宽越小，电极端的高频噪声通常越低。基于这一需求，本工作研制了 16 通道直流源机箱（DC_16C），用于多电极偏置与缓慢波形控制，并提供电流监测以提升系统的安全性与可维护性。



图 2.7 DC 机箱实物图

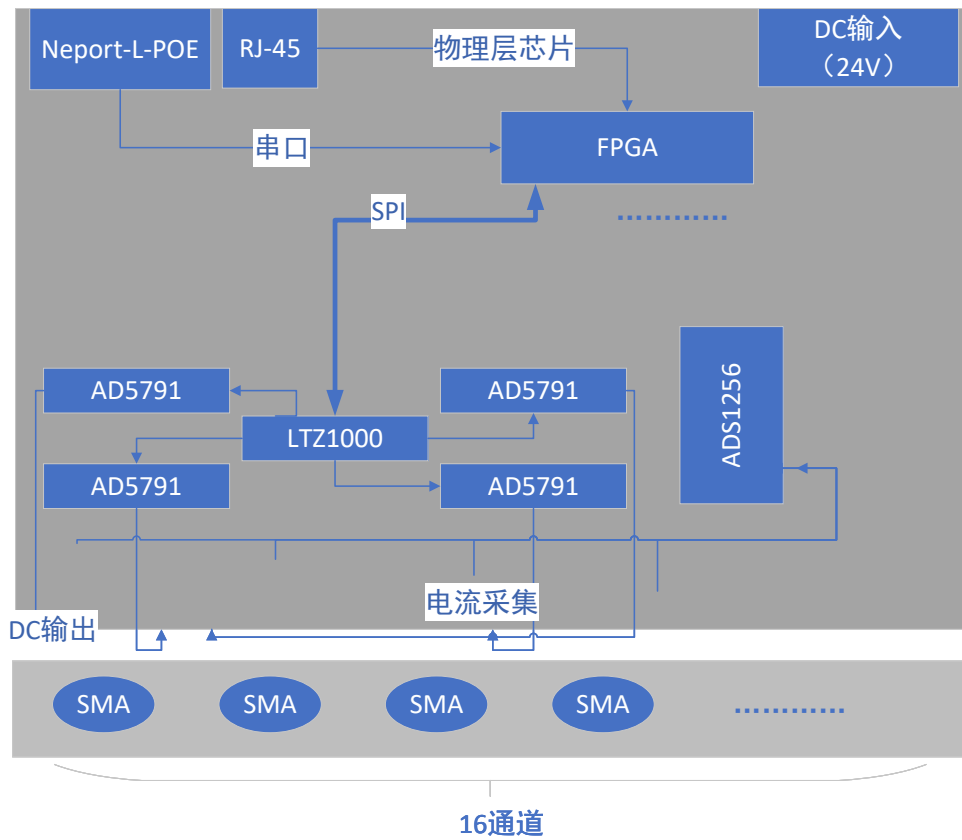


图 2.8 直流源输出原理图

直流源机箱整体采用“LTZ1000 基准 + AD5791 高分辨率 DAC + 树莓派控制 + 电流监测 + 外置滤波”的框架设计，并使用上位机以太网通信（Neport-L-POE）。相关配套 DC 滤波器主要参考本课题组先前系统工作^[65]，本文不再展开介绍。

如图 2.7 和图 2.8 所示，直流模拟输出由两组“8 通道子模块”实现，每组由多片 20 bit DAC（AD5791）、一套高稳定基准源（LTZ1000）以及一套高分辨率 ADC（ADS1256）构成，合计实现 16 路电压输出与电流/状态采集。机箱以 24 V 输入供电并产生模拟/数字多路电源；各通道通过 SMA 接口引出至 DC 滤波器，再接入

真空 DC 馈通。LTZ1000 提供稳定参考电压；AD5791 提供 20 bit 量化分辨率。以 $\pm 10\text{ V}$ 动态范围为例，理想 LSB 约为 $20\text{ V}/2^{20} \approx 19\text{ }\mu\text{V}$ ，因此 $\pm 30\text{ }\mu\text{V}$ 线性度指标对应约 1–2 LSB 误差。树莓派接收电压指令并生成 DAC 码字实现多通道同步更新；电流检测测试通过在输出端接入 $1\text{ M}\Omega$ 电阻到地，实测电流检测精度达到 $0.1\text{ }\mu\text{A}$ 量级且最大误差不超过 $0.5\text{ }\mu\text{A}$ ，可用于电极回路异常监测。

2.3 装置表征、离子捕获与微运动补偿

完成阱芯、真空腔体以及 RF/DC 电子学搭建之后，需要通过实验确认这些部件是否已共同形成预期的离子囚禁环境。本节按照“几何与电学参数确认—离子捕获—额外微运动补偿”的顺序展开：首先检查阱几何参数是否满足设计值以及射频、直流链路是否具备足够稳定性；随后验证离子能否被稳定装载并形成目标离子链；最后对额外微运动进行测量和补偿。这些结果共同决定了后续 $^{171}\text{Yb}^+$ 冷却、初始化、探测与量子门实验的可重复性——对于面向量子纠错的重复综合征提取线路而言，这种长期可重复的囚禁条件是其稳定运行的基本前提。

2.3.1 几何参数与电学参数

在完成如图 2.1 所示的 DC 与 RF 电极组装后，我们首先使用显微镜从俯视方向测量刀片间距，结果如表 2.1 所示；随后再从正视方向检查刀片在垂直方向上的间距均匀性，结果如表 2.2 所示。整体来看，电极间距与均匀性均与设计值相符，可满足后续离子装载和势阱形成的基本要求。

表 2.1 电极间距俯视图测量结果（单位： μm ）

	RF-A	RF-B	DC-A
RF-A	—	—	—
RF-B	700.0	—	—
DC-A	550.2	378.1	—
DC-B	423.4	604.7	699.4

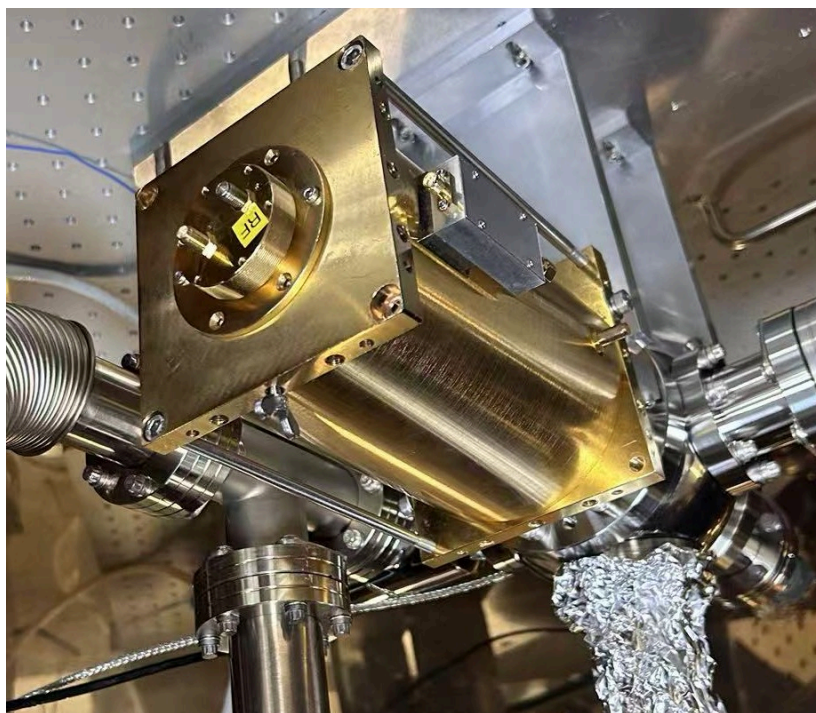
表 2.2 电极间距垂直方向均匀性测量结果 (单位: μm)

位置	上	中	下
A	530	550	538
B	571	608	612
L	322	337	325
R	362	373	371

在几何尺寸测量之后, 我们进一步进行了电学测试。

(1) 对地电阻与电容: RF 和 DC 引脚的对地电阻均为高阻, 符合设计预期。对地电容测试结果显示, RF 引脚对地电容均约为 12 nF, DC 引脚对地电容均约为 10 nF, 说明馈通、电缆与滤波链路连接状态正常。

(2) Helical 带载频率与品质因子: 进一步将制作好的 Helical 装配到 RF 馈通上方, 并通过矢量网络分析仪连接其信号输入 SMA 端口, 测量 S_{11} 曲线。实验结果如图 2.9 所示, 读取得到带载品质因子 $Q = 225$, 共振频率为 $f_0 = 23.286 \text{ MHz}$ (等价地, $\omega_0/2\pi = 23.286 \text{ MHz}$)。该结果表明谐振腔在实际负载条件下仍保持较好的电压增益和选择性。



(a) Helical 实物图

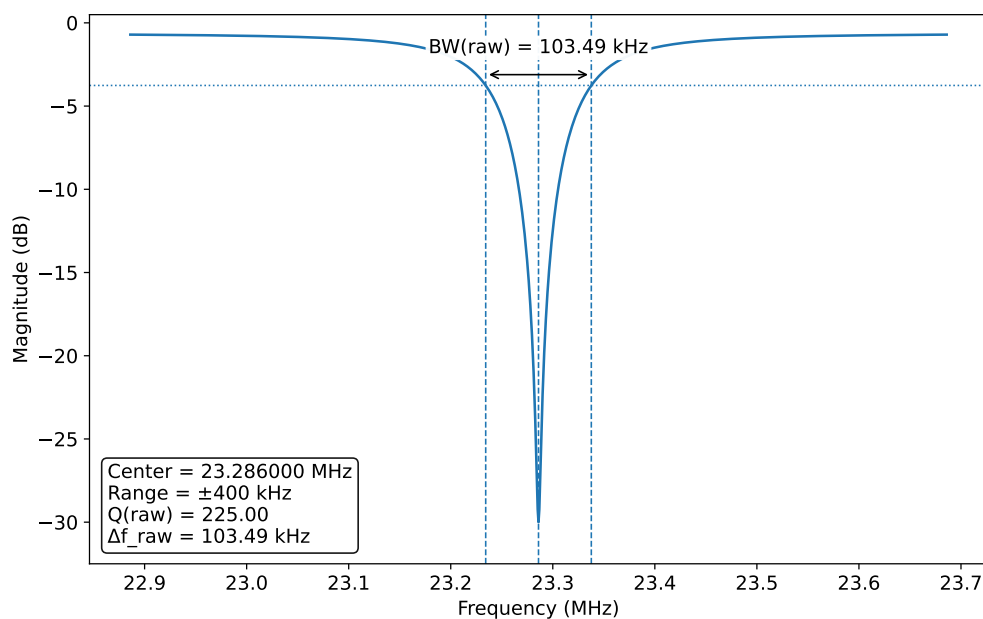
(b) Helical 负载 Q 值测试结果

图 2.9 实验中将制作好的 Helical 装配到 RF 馈通上方，并通过矢量网络分析仪测量其 S_{11} 曲线。由带宽读取得到带载品质因子 $Q = 225$ 。

(3) 高功率带载测试：使用射频机箱向 Helical 输入 1 W (30 dBm) 信号，随后逐步提高输入功率并监测频谱仪上的反射信号，同时利用耦合器将反射调至最小。测试过程中未观察到反射信号强度的异常突变；系统在 5 W 射频功率下可稳定运行超过 1 h，说明 RF 链路和谐振腔连接在目标功率范围内具有较好的可靠性。

(4) DC 馈通对 RF 的串扰测试：继续以 1 W (30 dBm) 驱动 Helical，并在反射最

小时，将由 DC 馈通耦合出的 RF 信号转接到频谱仪进行测量。结果如表 2.3 所示，所有 DC 通道的 pickup 信号均低于 -11.7 dBm，对应相对主 RF 信号的隔离度均优于 40 dBc，满足系统对 DC 与 RF 隔离度的工程要求。

表 2.3 馈通引脚对应的 DC 通道及 pickup 测量结果

馈通引脚	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
对应 DC 通道	B1	A5	A2	B2	B4	B3	A3	A1	A4	B5
Pickup (dBm)	-20.0	-16.7	-11.8	-14.0	-13.0	-16.6	-14.0	-11.7	-12.8	-16.4

2.3.2 射频与直流源机箱输出稳定性表征

射频和直流信号直接作用于离子，其稳定性对离子的运动性质起决定性作用。第二节已介绍了以高稳定性为目标设计的射频和直流源机箱，本节对其输出稳定性进行实验表征。

(1) **射频机箱测试：**实验中，SG382 以 24.987 MHz、5 dBm（由工作状态下 Helical 的共振频率确定）驱动系统，并将检波设定值设为 1.2 V。PID 锁定后，在约 13 h 数据段内，检波电压波动约为 $34\ \mu\text{V}$ ，对应相对稳定度约 28 ppm。结果如图 2.10 所示，满足离子阱长时间运行对 RF 功率稳定的工程需求。

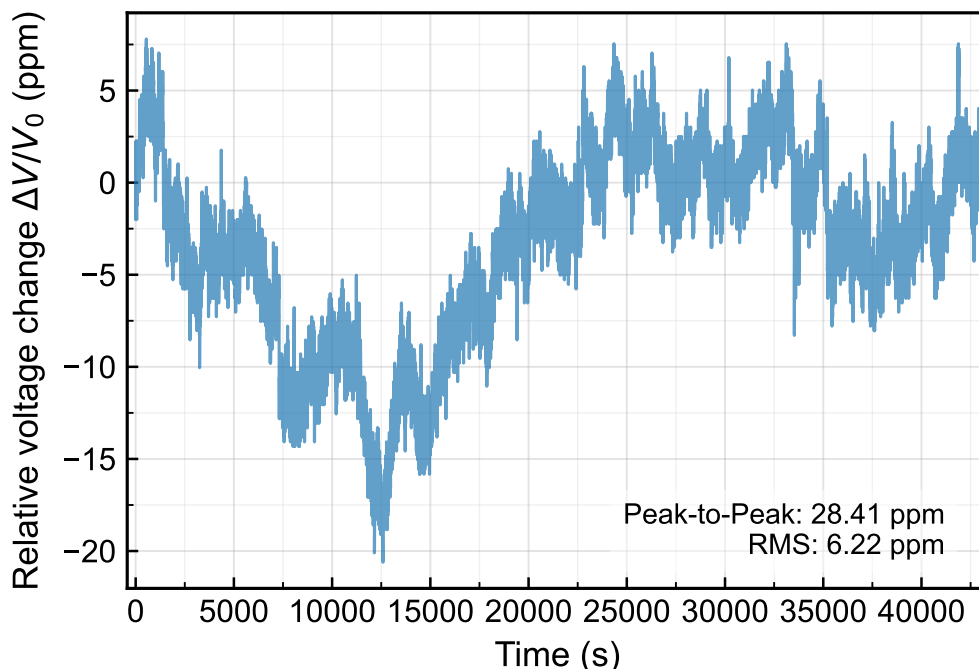


图 2.10 RF 功率稳定性测试结果

(2) **直流源机箱测试：**如图 2.11 所示，温漂测试在 10 V 条件下得到温漂系数为 $0.944\ \text{ppm}/^\circ\text{C}$ 。另外，长时漂移测试显示，在 1 V 至 10 V 范围内最大漂移约为

6 ppm@12 h。这些结果表明，直流源机箱能够满足离子阱多电极偏置与缓慢补偿扫描的稳定性要求，为后续量子门实验中保持离子链构型与振动模频率的长期一致性提供了电学保障。

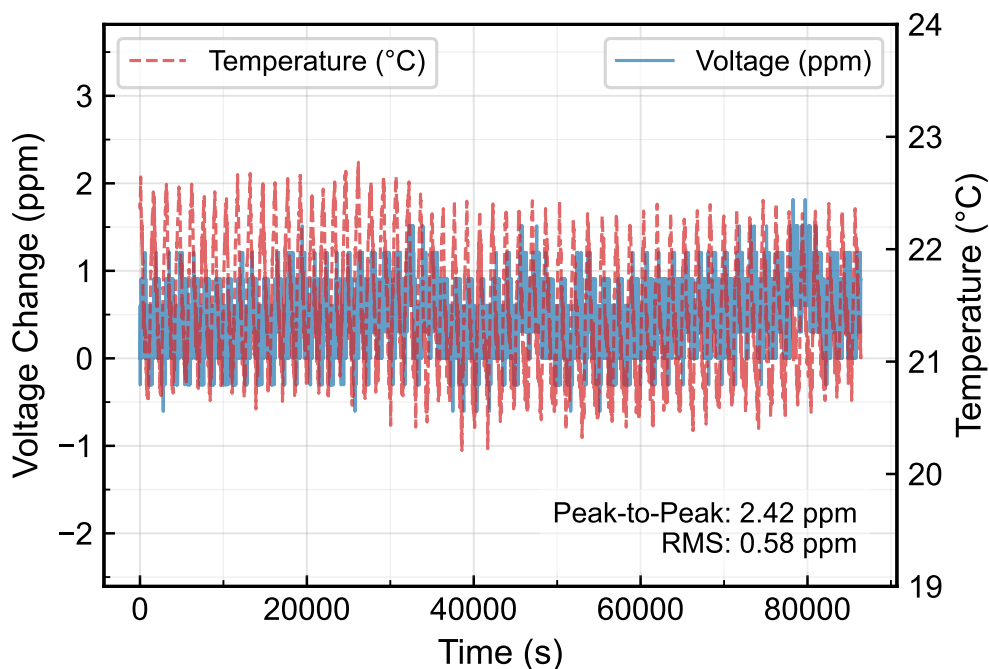


图 2.11 10 V 电压输出稳定性测试结果

2.3.3 离子捕获与额外微运动补偿

在完成上述几何与电学参数表征之后，我们将离子阱整体搬运至光学平台并开展离子装载实验。图 2.12 给出了搭建完成后的离子阱整体实物图。使用 RF 和 DC 机箱分别为电极提供稳定的射频与直流偏置，再配合后续章节将详细介绍的光学系统，即可在真空中实现离子的电离、冷却与囚禁。

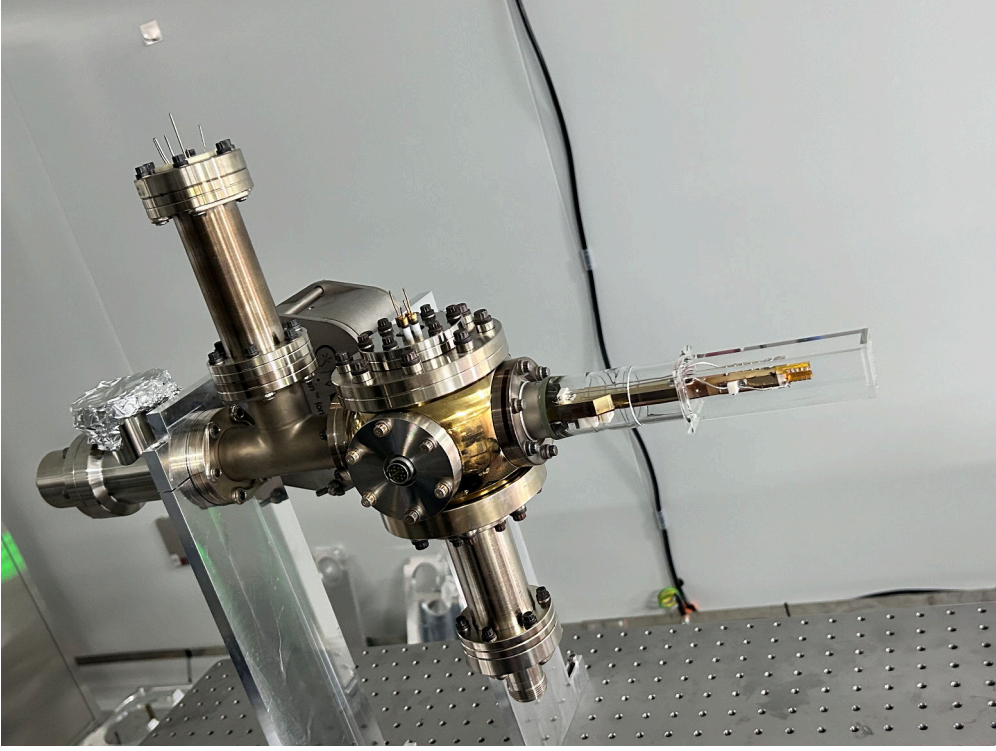
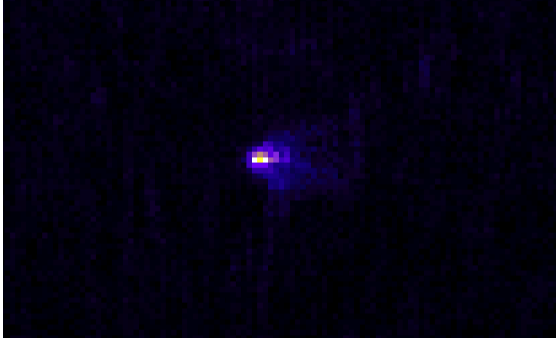
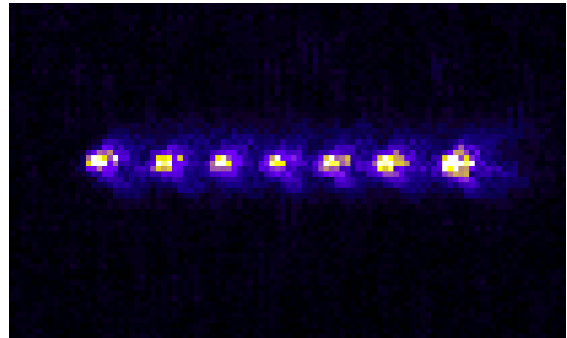


图 2.12 离子阱整体实物图

通过调节 DC 电压，可以在该阱中稳定捕获单离子或多离子链。图 2.13(a) 和图 2.13(b) 分别给出了单个离子与 7 离子链的典型 CCD 图像。这表明前述高通光阱芯、真空环境以及 RF/DC 驱动系统已能够共同提供稳定的囚禁条件，并具备形成后续量子比特寄存器所需离子链构型的基本能力，为在多离子体系上开展寻址量子门和量子线路实验奠定了基础。



(a) 捕获单个离子



(b) 捕获 7 离子链

图 2.13 离子阱搭建完成后的典型囚禁结果

在成功捕获离子之后，系统仍需进一步处理第一节中引入的额外微运动问题。根据前述理论分析可知，EMM 会从多个方面对离子冷却和量子操控产生不利影响，因此在后续实验中通常需要先完成微运动补偿，再进入更精细的量子态制备与操控过程。

参数激发法 (modulated tickle) 的物理机理：本工作采用“调制 RF 场曲率并监测

冷却荧光”的参数激发法进行精细补偿^[65,70]。将阱的 RF 幅度做小深度调制：

$$V_{\text{rf}}(t) = V_0 [1 + \epsilon \cos(\omega_{\text{mod}} t)] \cos(\Omega_{\text{rf}} t), \quad \epsilon \ll 1, \quad (2.40)$$

在 Doppler cooling 条件下，基于式 (2.9)，可得到电场调制修正后的运动方程^[70]：

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \omega_x^2 u \simeq -\epsilon \omega_x^2 x_0 \cos(\omega_{\text{mod}} t), \quad (2.41)$$

其中 γ 表征多普勒冷却提供的阻尼。式 (2.41) 表明，驱动力与静态位移 x_0 成正比，因此当离子恰好位于 RF null ($x_0 = 0$) 时激发信号消失；而当 $\omega_{\text{mod}} \approx \omega_x$ 时，离子会被共振激发并获得更大的速度展宽，导致冷却跃迁的平均散射率下降，从而在 PMT 或 CCD 上表现为荧光计数的“共振凹陷”，即文献中常称的 modulated tickle 信号。

微运动补偿流程：结合系统稳定性与补偿效率，我们采用“离子位移粗调 + 荧光参数激发精调”的两步流程^[65]。

(步骤 1) 离子位移粗调：在固定 DC 电压的条件下，先将 RF 功率升至工作点并记录离子三维坐标；随后将 RF 功率降低约 10 dB，此时离子平衡位置会向 DC null 移动。通过调节补偿电极电压，使低 RF 功率下离子坐标回到高 RF 功率时的位置；反复迭代，直至改变 RF 功率后离子位置基本不变，从而使 DC null 与 RF null 初步重合。为减小热胀冷缩带来的漂移，可采用低频（如 1 Hz）方式扫描 RF 功率以缓和热效应。

(步骤 2) 荧光参数激发精调：在粗调基础上，用 ω_{mod} 调制 RF 信号，并将 ω_{mod} 设置在某一径向模式频率附近；扫描补偿电极组合并记录荧光，图 2.15 给出了一个实验扫描示例。针对径向两个自由度，定义参数 α, β 并用其表征电极步进，其中电极编号如图 2.14 所示，则有：

$$dV_{\text{DC}3} = -dV_{\text{DC}8} = \frac{1}{4}(\alpha + \beta), \quad dV_{\text{DC}11} = -dV_{\text{DC}12} = \frac{1}{4}(\alpha - \beta). \quad (2.42)$$

固定 α （或 β ）后扫描 β （或 α ），得到荧光随 ω_{mod} 变化的二维图；对每个参数点计算荧光计数的标准差，标准差最小时对应的参数组合意味着离子对 tickle 最不敏感。改变另一个参数并重复该过程，可分别对两条径向模式拟合出最佳补偿直线，其交点即给出最终的 $(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})$ ，据此更新补偿电极电压即可完成径向微运动补偿。图 2.16 给出了一个实验拟合示例。

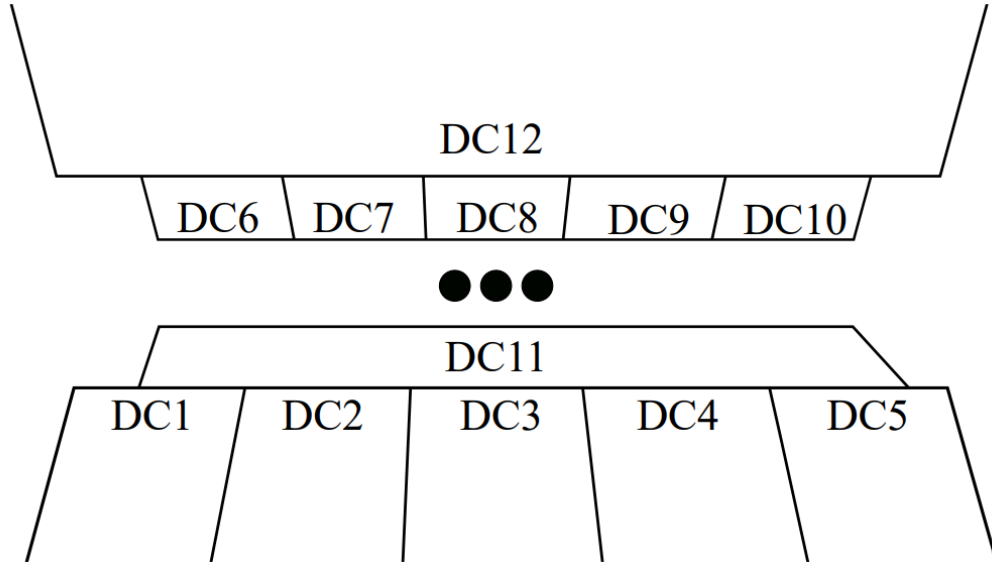


图 2.14 DC 刀片电极编号示意图。DC1–10 为 DC 刀片电极上的 10 个子电极，DC11 和 DC12 为加载在两片 RF 电极上的 DC 偏压。其中 DC3、DC8、DC11 和 DC12 主要负责补偿径向微运动，其余电极主要负责补偿轴向微运动。图源^[65]

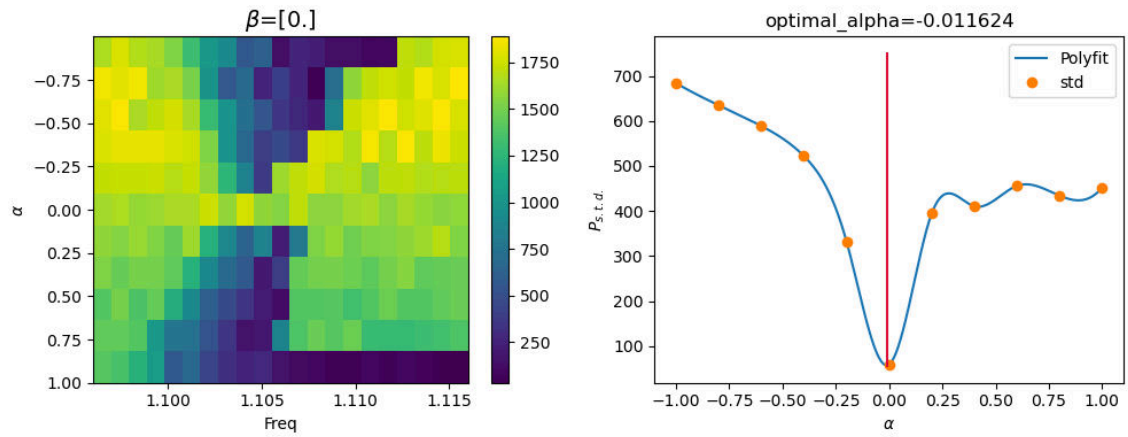


图 2.15 EMM 补偿二维图：固定 β 后扫描 α 的实验示例

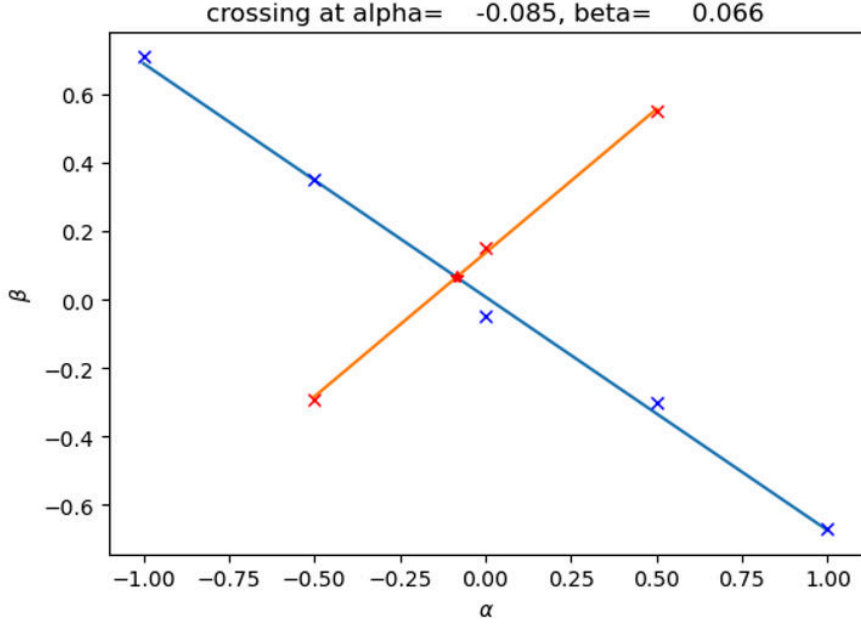


图 2.16 EMM 补偿步进拟合图

该方法的补偿精度可用残余杂散场 E_{res} 或残余位移 $x_{0,\text{res}}$ 表征，其关系为 $E_{\text{res}} = (m\omega_x^2/Q)x_{0,\text{res}}$ 。在本工作中，精调阶段得到的 $(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})$ 在日间重复补偿中表现出较好的收敛性和可重复性，残余电场可补偿到小于 1 V m^{-1} 量级，满足后续量子门实验对离子定位精度的要求。其最终受限因素主要包括荧光散粒噪声、RF 调制深度 ϵ 、补偿电压分辨率以及慢漂移等；必要时还可进一步使用微运动边带法或射频光子关联法进行独立标定与交叉验证^[54,71]。

2.4 本章小结

本章按照“Paul 阱理论模型—装置实现—实验表征”的逻辑，完成了高通光离子阱系统的建立与验证。首先，从线性 Paul 阱模型出发，给出了单离子与多离子链的基本运动描述，推导了振动模结构与 Lamb-Dicke 参数等直接服务于后续量子门设计的物理量，并阐明了额外微运动的补偿需求；随后介绍了高通光玻璃 cell、刀片电极结构、螺旋谐振腔、RF 稳定机箱和高稳直流源等关键硬件；最后通过几何尺寸测量、谐振腔带载测试、射频/直流稳定性测试、单/多离子捕获与参数激发微运动补偿实验，验证了该平台已具备稳定囚禁和低微运动运行的基础条件。本章确立的振动模可控性、RF/DC 长期稳定性以及低额外微运动水平，分别对应了后续两比特门参数窗口、门保真度的长期可重复性以及冷却与门操作的基础工作条件，为下一章 $^{171}\text{Yb}^+$ 基础操控理论以及第 4 章光学与微波实验系统的实现提供了可靠的装置基础与参数边界。

第 3 章 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控理论

对于 $^{171}\text{Yb}^+$ 平台，量子比特通常编码在基态 $^2\text{S}_{1/2}$ 的超精细结构中；这一方案兼具能级结构清晰、可选取一阶磁场不敏感的钟态，以及可直接利用 $^2\text{S}_{1/2} \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ 强偶极跃迁进行冷却和荧光探测等优点，因此已成为囚禁离子量子计算中最成熟的实现方案之一^[18,44,72]，也是本工作面向低串扰寻址量子门与系统级量子线路实现的主要物理起点。

本章按照基础操控实验的实际序列组织理论内容。首先介绍 $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级结构、量子比特编码方式以及离子装载原理，并给出单次实验循环的典型操作流程；随后讨论初态制备，包括多普勒冷却、EIT 冷却与光学抽运的主要物理机制和近似公式；接着建立微波驱动下的二能级 Rabi 与 Ramsey 模型，为后续相干操控实验提供可直接拟合的解析表达；最后分析基于 369 nm 荧光的态探测过程，并给出 SPAM error (State Preparation and Measurement Error) 的建模方法。本章同时论述这些理论模型与后续高保真度量量子门、随机基准测试以及多比特量子线路执行之间的接口关系：低 $\bar{n}$ 有助于压低门级热误差并抑制运动噪声在多门序列中的传播，稳定的钟态相干性为跨门相位跟踪提供基准，而可标定的 SPAM 模型则是后续 Bell/GHZ 保真度评估、QV 统计乃至量子纠错中综合征判读可靠性的前提^[11,50]。上述理论结果既是对第 2 章离子捕获的理论补充，也将作为第 4 章实验系统搭建、参数设定与数据分析的直接依据。

3.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特编码与操作流程

3.1.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 能级结构

表 3.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 平台中与 Cooling、Pumping、Detecting 和 Repumping 相关的主要光学跃迁。表中列出了本章后续冷却、抽运、探测与回泵模型所涉及的关键波长和典型线宽参数。

跃迁	典型波长	典型线宽/特征	主要用途
$^2\text{S}_{1/2} \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$	369.5 nm	$\Gamma/2\pi \sim 19.6 \text{ MHz}$	Cooling/Pumping/Detecting
$^2\text{D}_{3/2} \rightarrow ^3[3/2]_{1/2}$	935 nm	$\Gamma/2\pi \sim 4.2 \text{ MHz}$	Repumping
$^2\text{F}_{7/2} \rightarrow ^1[3/2]_{3/2}$ 清除跃迁	760 nm	$\Gamma/2\pi \sim 5.4 \text{ MHz}$	Repumping

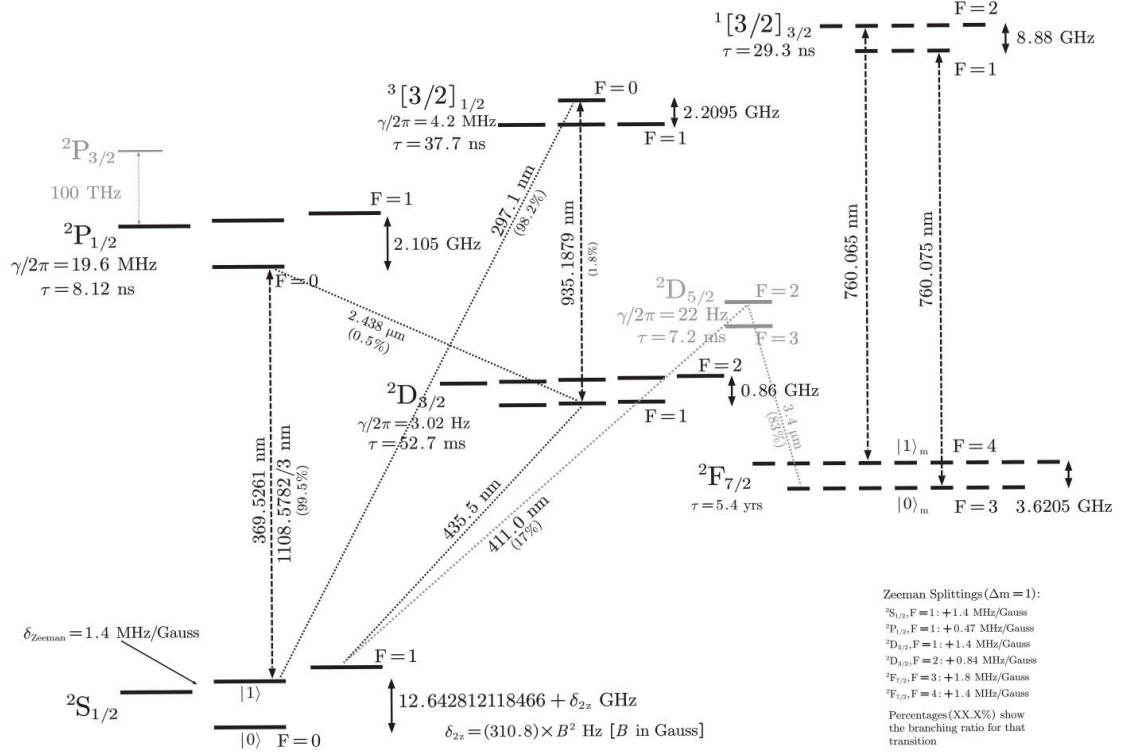


图 3.1 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子主要能级结构示意图。图中标出了用于量子比特编码、冷却、探测以及回泵的关键能级与跃迁通道，是后续基础操控与 Raman 量子门分析的能级基础。

图 3.1 给出了 $^{171}\text{Yb}^+$ 的主要能级示意，更详细的能级数据与跃迁波长可参考 NIST 原子谱数据库^[73]。 $^{171}\text{Yb}^+$ 的冷却与探测主要依赖 $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$ 共振跃迁（约 369.5 nm），该跃迁天然线宽约为 $\Gamma/2\pi \approx 19.6 \text{ MHz}$ ，对应较高的散射率，适合用于多普勒冷却与荧光探测；但 $^2P_{1/2}$ 态会以小概率衰变到 $^2D_{3/2}$ 亚稳态，因此需要 935 nm 回泵光将其抽回冷却循环^[74]。此外，体系还可能经碰撞等过程被泵浦到寿命更长的 $^2F_{7/2}$ 态，需要借助 760 nm 光清空该泄漏通道^[72,74]。

本论文采用 $^{171}\text{Yb}^+$ 基态超精细能级编码量子比特：

$$|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=0, m_F=0\rangle, \quad |1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle. \quad (3.1)$$

由于两态均取 $m_F = 0$ ，在弱磁场下其一阶塞曼频移相互抵消，从而形成对磁场噪声更为鲁棒的“钟态”量子比特；这也是 $^{171}\text{Yb}^+$ 平台能够获得较长相干时间的重要原因之一^[75]。对本文而言，这种鲁棒性不仅体现在单次 Rabi 或 Ramsey 实验中，更直接关系到后续寻址门操作中的相位基准保持和长量子线路中的空闲误差抑制。进一步面向量子纠错，钟态编码对低频磁场漂移的天然容忍度，使得重复综合征提取过程中由环境磁噪声引入的相关误差得到有效抑制，这对维持纠错循环中物理比特的稳定性具有重要意义。

3.1.2 离子烧蚀与装载原理

实验上首先需要将目标数目的离子稳定装载到势阱中，并获得所需的离子链构型。对于线性离子链，其稳定结构主要由离子数与轴向势阱参数决定。装载效率、同位素选择性和对电极环境的扰动程度，都会直接影响后续量子操控实验的重复性与初始条件的可控性。

典型的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子装载采用中性 Yb 原子束结合共振增强光电离 (photoionization) 方案。以两色光电离为例，首先利用 399 nm 激光共振激发中性 Yb 的 $^1\text{S}_0 \rightarrow ^1\text{P}_1$ 跃迁，随后再用 369 nm (或其他紫外/近紫外) 光将其电离为 Yb^+ 。由于不同同位素之间存在数百 MHz 量级的同位素位移，399 nm 共振激发能够显著增强对 $^{171}\text{Yb}^+$ 的选择性，从而降低杂质离子比例并改善后续冷却效率^[76]。

在本实验中，我们采用 532 nm 脉冲激光烧蚀金属 Yb 靶材产生原子束流，并配合上述共振增强光电离实现按需装载。与连续热源相比，烧蚀装载的热负载更小、装载速度更快，同时可减轻长期原子束对电极和窗口的沉积污染，因此更适合紧凑玻璃 cell 中的高通光装置^[51,77-78]。

3.1.3 实验操作的典型时序

在完成离子装载并进行微动补偿之后，系统便具备了良好定义的 N 个量子比特。后续实验通常围绕同一条标准时序循环展开，其基本步骤为：

1. **多普勒冷却：**将离子冷却到多普勒极限附近，典型平均声子数为 $\bar{n} \sim 5$ 至 10；
2. **亚多普勒冷却：**采用 PGC、EIT 或边带冷却等方案进一步降低声子数，使目标振动模接近基态；
3. **内态初始化：**通过光学抽运及必要的微波脉冲将离子制备到 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ ；
4. **量子门或控制序列执行：**利用微波或 Raman 驱动实现单比特旋转及多比特相互作用；
5. **态探测：**通过荧光探测读取每个离子的量子态。

在本文语境下，上述流程的目标并不仅是完成一次单离子基础实验，而是为后续寻址 Raman 单比特门、两比特 MS 门以及多比特线路执行建立统一的初始化—操控—读出接口。从高保真度寻址量子门线路的角度看，冷却质量直接决定了 Lamb-Dicke 参数展开的有效性与门误差中热占据相关项的大小，初始化效率决定了每轮线路的起始态纯度，而读出保真度则通过 SPAM 基线进入所有门级与线路级性能指标。若进一步考虑量子纠错场景，冷却、初始化与读出步骤又分别对应降低运动误差传播、准备辅助比特以及综合征判读前端等基础环节。下面将围绕上述时序中的关键步骤，依次讨论其理论模型与实验上最常用的近似表达。

3.2 量子初态制备原理

3.2.1 多普勒冷却原理

考虑近似两能级体系 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ，自然线宽为 Γ ，激光失谐为 $\Delta = \omega_L - \omega_0$ ，饱和参数定义为 $s \equiv I/I_{\text{sat}}$ 。稳态散射率可写为^[18,44]：

$$R_{\text{sc}}(\Delta) = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1 + s + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2}. \quad (3.2)$$

饱和强度的表达式为：

$$I_{\text{sat}} = \frac{\pi \hbar c}{3\lambda^3 \tau}, \quad (3.3)$$

其中 λ 为跃迁波长、 τ 为激发态寿命。对 $\lambda = 369.5 \text{ nm}$ 、 $\tau = 8.12 \text{ ns}$ ，有 $I_{\text{sat}} \approx 51 \text{ mW cm}^{-2}$ 。

若 369 nm 光近似为高斯束，束腰 w_0 处的中心强度为 $I_0 = 2P/(\pi w_0^2)$ ，则实现给定饱和参数 s 所需的功率为：

$$P = \frac{\pi w_0^2}{2} s I_{\text{sat}}. \quad (3.4)$$

例如取 $w_0 = 50 \mu\text{m}$ ，则达到 $s = 1$ 所需功率仅为微瓦量级，这也是 369 nm 冷却光易于进入饱和区的重要原因。

若激光波矢沿 x 方向、离子速度为 v ，则多普勒频移使失谐变为 $\Delta \rightarrow \Delta - kv$ 。在单束行波近似下，辐射压力为：

$$F(v) = \hbar k R_{\text{sc}}(\Delta - kv). \quad (3.5)$$

对小速度作一阶展开，可得：

$$F(v) \approx F(0) - \alpha v, \quad \alpha \equiv - \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=0} = \hbar k^2 \left. \frac{\partial R_{\text{sc}}}{\partial \Delta} \right|_{\Delta}. \quad (3.6)$$

其中 $\alpha > 0$ 对应粘滞阻尼，其物理来源是红失谐激光对迎面运动离子的散射率更高，从而在平均意义上传递反向动量。

将式 (3.2) 代入，可显式写出：

$$\alpha = -\hbar k^2 \frac{4s\Delta/\Gamma}{\left(1 + s + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2\right)^2}. \quad (3.7)$$

因此在固定 s 时，红失谐 ($\Delta < 0$) 确实给出 $\alpha > 0$ ，并且 $|\Delta| \sim \Gamma$ 附近阻尼最强。

冷却过程中，自发辐射的随机反冲会引入动量扩散，可用扩散系数 D_p 描述。在一维简化模型下可取：

$$D_p \sim (\hbar k)^2 R_{\text{sc}}(\Delta), \quad (3.8)$$

更精确的系数还取决于散射角分布与具体几何因子^[79]。将离子视作处于粘滞阻尼与扩散噪声共同作用下的一维布朗粒子，其平均动能满足如下近似平衡关系：

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = -\frac{\alpha}{m} \left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle + \frac{D_p}{m}. \quad (3.9)$$

稳态时有 $\langle p^2 \rangle = D_p/\alpha$ ，进而得到等效温度：

$$k_B T \approx \frac{D_p}{\alpha}. \quad (3.10)$$

在弱饱和极限 $s \ll 1$ 且取最优失谐 $\Delta = -\Gamma/2$ 时，可得到著名的多普勒极限：

$$T_D \approx \frac{\hbar \Gamma}{2k_B}. \quad (3.11)$$

对 $\Gamma/2\pi \approx 19.6 \text{ MHz}$ 的 369 nm 跃迁，有 $T_D \approx 0.5 \text{ mK}$ 。若离子阱某一振动模的频率为 ω_i ，并满足 $\hbar\omega_i \ll k_B T_D$ （弱束缚区），则平均振动量子数可近似写为：

$$\bar{n} \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega_i}. \quad (3.12)$$

因此在典型 1 MHz 量级的阱频下，多普勒冷却通常只能把 $\bar{n}$ 降到 $\mathcal{O}(10)$ ，仍需进一步采用亚多普勒或边带类冷却方案来逼近运动基态。换言之，多普勒冷却在本文中的角色更接近进入高保真门工作区间的第一步，而非最终的运动态制备。对于后续以 Raman 寻址和 MS 门为核心的量子线路实验，更低的 $\bar{n}$ 将直接关系到边带分辨精度、门速率标定可靠性和旁观模式激发的抑制；在多比特量子线路中，初始运动态占据过高还会导致不同门操作之间产生相关的运动噪声传播，从而降低线路整体保真度。

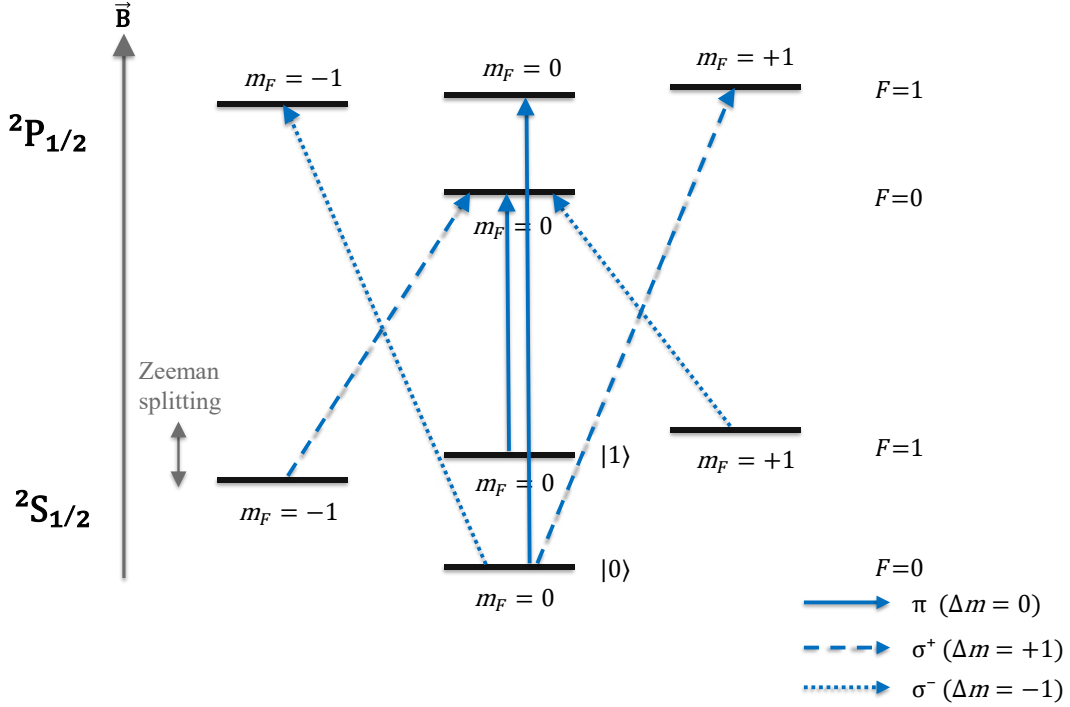


图 3.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 在 Doppler cooling 条件下的 369 nm 激光能级示意图。图中给出了冷却光与相关能级之间的耦合关系，用于说明冷却、抽运边带与偏振配置的物理作用。

图 3.2 给出了 $^{171}\text{Yb}^+$ 在 Doppler cooling 条件下的主要能级与光耦合关系。在实验实现中，369 nm 光通常需要加载用于冷却与抽运的 GHz 量级边带，并通过偏振设计避免在 Zeeman 简并下形成相干暗态；这些具体光路与调制实现的细节，将在第 4 章结合实验系统进一步说明^[45]。

3.2.2 EIT 冷却原理

EIT (electromagnetically induced transparency, 电磁诱导透明) 冷却利用三能级 Λ 系统中的量子干涉效应消除载波加热，同时通过调节激光参数使红边带与系统的“缀饰态” (dressed state) 共振，从而实现极大的净冷却速率。相比于传统的多普勒冷却，EIT 冷却能够以更宽的参数窗口将离子的运动态冷却至接近理论基态^[80-81]。

设离子在某一选定方向 (例如径向 x) 上的运动态频率为 ν ，湮灭算符与产生算符分别为 a 和 $a^\dagger$ ，则包含内外态的自由哈密顿量可写为：

$$H_0 = \hbar\nu a^\dagger a + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_{rg} |r\rangle\langle r|, \quad (3.13)$$

其中将 $|g\rangle$ 的能量取为零点， $\hbar\omega_{rg}$ 为两个基态之间的能级差。两束激光分别耦合

$|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 与 $|r\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, 则实验室表象下的光与原子相互作用项为:

$$H_L(t) = \frac{\hbar}{2} \left[\Omega_g e^{i(\mathbf{k}_g \cdot \mathbf{x} - \omega_g t + \phi_g)} |e\rangle\langle g| + \Omega_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega_r t + \phi_r)} |e\rangle\langle r| + \text{H.c.} \right]. \quad (3.14)$$

其中 $\Omega_{g,r}$ 为复 Rabi 频率, $\mathbf{k}_{g,r}$ 为波矢, $\omega_{g,r}$ 为光场角频率。

引入么正变换 $U(t) = \exp \left[-i(\omega_g |e\rangle\langle e| + (\omega_g - \omega_r) |r\rangle\langle r|)t \right]$ 并在旋波近似下转入旋转表象, 可得有效哈密顿量:

$$H = \hbar\nu a^\dagger a - \hbar\Delta |e\rangle\langle e| - \hbar\delta |r\rangle\langle r| + \frac{\hbar}{2} \left[\Omega_g e^{i\mathbf{k}_g \cdot \mathbf{x}} |e\rangle\langle g| + \Omega_r e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}} |e\rangle\langle r| + \text{H.c.} \right], \quad (3.15)$$

其中 $\Delta \equiv \omega_g - \omega_{eg}$ 为单光子失谐, $\delta \equiv (\omega_g - \omega_r) - \omega_{rg}$ 为双光子失谐。

沿选定方向 x 有 $x = x_0(a + a^\dagger)$ (其中 $x_0 = \sqrt{\hbar/2mv}$), 由此激光相位中包含位置依赖项 $e^{ik_j x} = e^{in_j(a+a^\dagger)}$ 。在 Lamb-Dicke 区域 ($\eta_j \sqrt{2\bar{n}+1} \ll 1$) 内, 可作一阶展开 $e^{in_j(a+a^\dagger)} \approx 1 + in_j(a + a^\dagger)$ 。于是哈密顿量可分解为只驱动内态的“载波”部分与同时改变运动量子数的“边带”部分:

$$H \approx H_{\text{car}} + H_{\text{sb}}, \quad H_{\text{sb}} = \frac{i\hbar}{2}(a + a^\dagger) \left[\eta_g \Omega_g |e\rangle\langle g| + \eta_r \Omega_r |e\rangle\langle r| - \text{H.c.} \right]. \quad (3.16)$$

暗态的形成与 Fano 吸收谱: 我们首先分析忽略运动耦合 ($H_{\text{sb}} = 0$) 时的内态动力学。设双光子共振条件 $\delta = 0$ 严格成立, 此时载波哈密顿量 H_{car} 在基底 $\{|g\rangle, |r\rangle, |e\rangle\}$ 下可对角化。定义归一化亮态 $|B\rangle$ 和暗态 $|D\rangle$:

$$|B\rangle = \frac{\Omega_g |g\rangle + \Omega_r |r\rangle}{\Omega}, \quad |D\rangle = \frac{\Omega_r |g\rangle - \Omega_g |r\rangle}{\Omega}, \quad \Omega \equiv \sqrt{|\Omega_g|^2 + |\Omega_r|^2}. \quad (3.17)$$

在新的基底 $\{|D\rangle, |B\rangle, |e\rangle\}$ 下, 载波哈密顿量改写为:

$$H_{\text{car}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2} (|e\rangle\langle B| + |B\rangle\langle e|). \quad (3.18)$$

从式 (3.18) 可以明显看出, $\langle e| H_{\text{car}} |D\rangle = 0$, 即暗态 $|D\rangle$ 与激发态完全解耦。在自发辐射耗散的作用下, 系统布居会通过相干布居囚禁 (CPT) 效应被单向抽运并累积在暗态 $|D\rangle$ 中。

同时, 亮态 $|B\rangle$ 与激发态 $|e\rangle$ 以 Rabi 频率 Ω 相互耦合, 形成一对缀饰态。在实验设定的大失谐条件 ($|\Delta| \gg \Omega$) 下, 亮态 $|B\rangle$ 会由于能级排斥效应获得一个显著的 AC Stark 位移:

$$\delta_{\text{AC}} \simeq \frac{\Omega^2}{4\Delta}. \quad (3.19)$$

这种特殊的能级结构赋予了系统极具特征的 Fano 型吸收谱: 在 $\omega = 0$ (载波) 处, 由于暗态干涉, 吸收被完全抑制 (即 EIT 透明窗口); 而在 $\omega \approx \delta_{\text{AC}}$ 处, 对应于移位后的亮态共振, 吸收达到峰值。

冷却速率的推导与物理图像：现在我们引入边带哈密顿量 H_{sb} 。由于系统布居几乎全部占据在 $|D, n\rangle$ ，边带项 H_{sb} 可视为微扰，它导致系统从 $|D, n\rangle$ 向外跃迁。因为暗态没有载波吸收，所以纯粹的载波加热被消除了。离子仅通过一阶边带发生能级跃迁，其向 $|D, n+1\rangle$ （蓝边带加热）和 $|D, n-1\rangle$ （红边带冷却）的跃迁速率 $A_{\pm}$ ，本质上取决于 Λ 系统在对应频移 $\omega = \mp\nu$ 处的有效吸收系数。

根据线性响应理论与光学 Bloch 方程，在弱探针场（对应声子耦合）作用下，该 Λ 系统的吸收谱型 $W(\omega)$ 正比于^[80]：

$$W(\omega) \propto \frac{\omega^2}{\omega^2 \Gamma^2/4 + [\omega(\omega - \Delta) - \Omega^2/4]^2}. \quad (3.20)$$

分子中的 ω^2 直接体现了暗态干涉效应：当失谐 $\omega = 0$ 时，跃迁概率严格为零，这就从根本上压制了载波引起的加热；分母则体现了缀饰态的共振条件，当 $\omega \approx \Omega^2/(4\Delta) = \delta_{\text{AC}}$ 时取得极大值。

在实验中，通常设置 $\Omega_g \ll \Omega_r$ （此时 $\Omega \approx \Omega_r$ ），红、蓝边带散射速率 $A_{\pm}$ 对应于 $W(\omega)$ 在 $\omega = \mp\nu$ 处的取值。代入归一化系数后，可严密地导出：

$$A_{\pm} = \frac{\Omega_g^2}{\Gamma} \frac{\Gamma^2 \nu^2}{\Gamma^2 \nu^2 + 4 \left(\frac{\Omega_r^2}{4} - \nu(\nu \mp \Delta) \right)^2}. \quad (3.21)$$

这一解析式给出了 EIT 冷却最直观的物理图像：当我们将 AC Stark 位移精准调谐至声子频率（即 $\delta_{\text{AC}} \approx \nu$ ）时，红边带散射速率 A_- 被 Fano 共振峰极大增强；同时蓝边带散射速率 A_+ 被推向远离共振的区域，从而获得极大的净冷却效率。

冷却极限与稳态声子数：根据平均声子数定义 $\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \langle n | \rho | n \rangle$ ，结合 A_- 与 A_+ ，声子数的演化满足速率方程：

$$\frac{d}{dt} \langle n \rangle = -(A_- - A_+) \langle n \rangle + A_+. \quad (3.22)$$

净冷却率定义为 $\gamma_{\text{cool}} = (A_- - A_+)$ ，当 $d\langle n \rangle/dt = 0$ 时，稳态平均声子数为 $\bar{n}_{\text{ss}} = \frac{A_+}{A_- - A_+}$ 。将式 (3.21) 代入，可得：

$$\bar{n}_{\text{ss}} = \frac{\Gamma^2 \nu^2 + 4 \left(\frac{\Omega_r^2}{4} - \nu(\nu + \Delta) \right)^2}{4\Delta\nu(\Omega_r^2 - 4\nu^2)}. \quad (3.23)$$

求解其相对于 Rabi 频率 Ω_r 的极小值，可得到最优冷却条件和相应的冷却极限：

$$\frac{\Omega_r^2}{4} \approx \nu(\nu + \Delta), \quad \bar{n}_{\text{min}} \simeq \left(\frac{\Gamma}{4\Delta} \right)^2. \quad (3.24)$$

在实验常见的 $\Delta \gg \nu$ 条件下，最优条件可化简为：

$$\delta_{\text{AC}} \simeq \frac{\Omega_r^2}{4\Delta} \approx \nu. \quad (3.25)$$

这意味着最优 EIT 冷却条件，即是把缀饰态的窄吸收峰精确对准红边带位置。对本文后续实验而言，EIT 冷却的意义在于为高保真度两比特门提供低热占据初态，

从而减小运动相关误差在多门序列中的累积。在面向量子纠错的重复综合征测量循环中，每轮操作之间的冷却质量直接决定了热噪声是否会在纠错中无界放大，因此深度的亚多普勒冷却是维持系统长时间线路运行稳定性的重要基石。

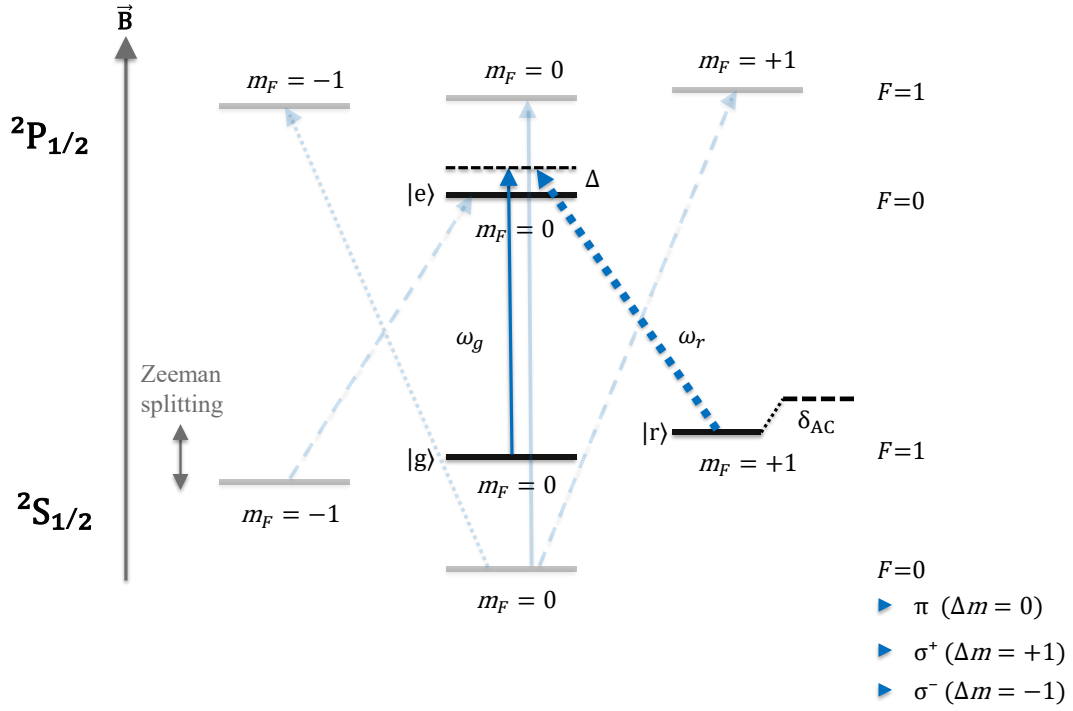


图 3.3 $^{171}\text{Yb}^+$ EIT cooling 的 369 nm 激光能级示意图。两束光在 Λ 型结构中形成暗态干涉，并通过 AC Stark 位移增强红边带散射、抑制载波吸收。

3.2.3 光学抽运 (optical pumping) 方法与效率分析

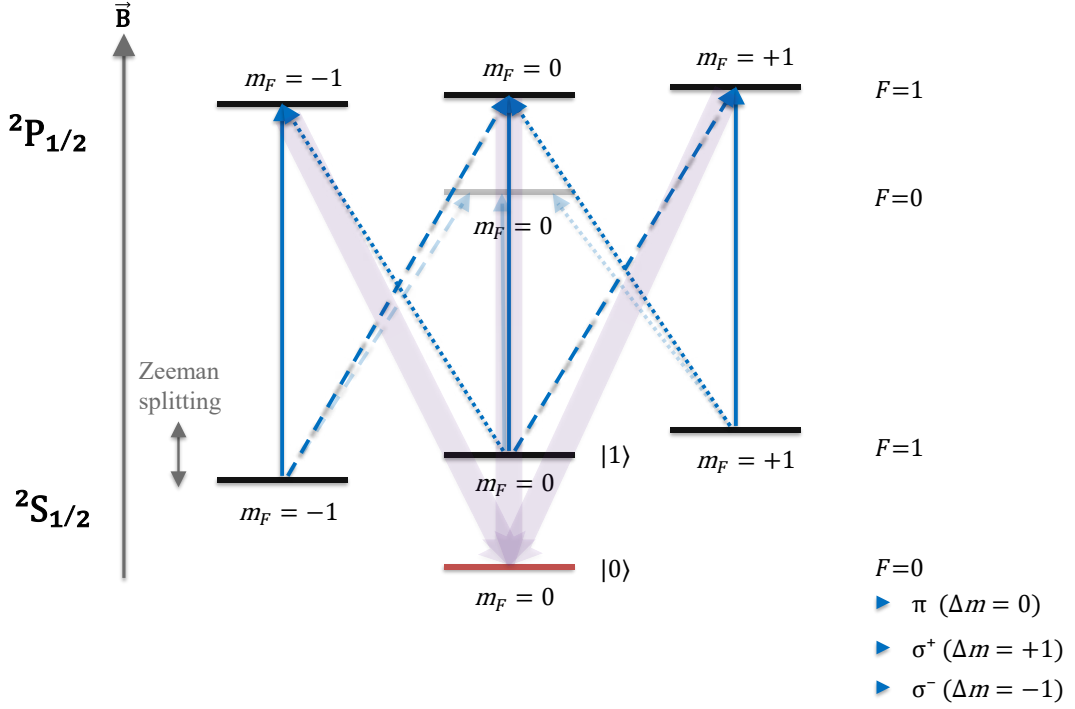


图 3.4 $^{171}\text{Yb}^+$ pumping 过程中 369 nm 激光能级示意图。通过把 $F = 1$ 中的布居逐步抽运到暗态 $|0\rangle$ ，实现后续量子门与测量序列所需的内态初始化。

制备 $|0\rangle \equiv ^2S_{1/2}(F = 0)$ 的核心思路，是利用 369 nm 光驱动 $^2S_{1/2}(F = 1) \rightarrow ^2P_{1/2}(F' = 1)$ ，而 $|0\rangle$ 对该光场保持暗态，从而通过自发辐射逐步把布居抽运进 $|0\rangle$ 。图 3.4 给出了这一过程的能级结构示意。

超精细跃迁的线强度满足：

$$S_{F \rightarrow F'} \propto (2F + 1)(2F' + 1) \left\{ \begin{matrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{matrix} \right\}^2, \quad (3.26)$$

对 $I = \frac{1}{2}$ 、 $J = J' = \frac{1}{2}$ 可得相对强度：

$$S_{1 \rightarrow 1} : S_{0 \rightarrow 1} : S_{1 \rightarrow 0} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

因此可知， $^2P_{1/2}(F' = 1)$ 自发辐射回到 $F = 0$ 的分支比约为 1/3。若抽运光对 $F = 1$ 的散射率为 $R_{\text{sc}}^{(p)}$ ，则 $F = 1$ 布居的有效耗尽速率近似为：

$$\Gamma_{\text{pump}} \simeq \frac{1}{3} R_{\text{sc}}^{(p)}, \quad P_{F=1}(t) \approx e^{-\Gamma_{\text{pump}} t}. \quad (3.28)$$

当 $R_{\text{sc}}^{(p)} \sim 10 \text{ MHz}$ 时，几微秒量级的抽运脉冲即可把初始化误差压到 10^{-3} 以下；实际误差还会受到偏振不纯、背景光、磁场不稳定和泄漏态等因素的影响^[72]。从系

统角度看，光学抽运效率不仅决定单次实验的初始态纯度，也会通过 SPAM 基线进入后续 RB、Bell 态和量子线路统计，因此其模型需要与探测模型一并处理。在量子纠错场景中，每轮综合征提取前的比特复位实质上依赖快速、高纯度的态初始化能力，因此光学抽运的速度与效率也是后续扩展到纠错线路时需要持续优化的参数之一。

3.3 二能级系统与微波驱动模型

尽管本文后续高保真度单比特原生门主要由 Raman 过程实现，但微波驱动模型在基础操控阶段仍然是最直接的频率参考与相干性表征工具：它不涉及运动耦合和光学相位噪声，有利于独立标量子比特频率、相干时间以及相位跟踪基准。因此，本节既服务于第 4 章的微波实验，也为后续 Raman 门的相位与失谐校准提供参照。

3.3.1 Rabi 振荡与 Rabi 频率

将量子比特限制在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 子空间内，可用受驱二能级哈密顿量描述其演化。设量子比特本征频率为 ω_0 ，外加微波驱动频率为 ω 、初始相位为 ϕ 、脉冲持续时间为 t 、耦合强度对应 Rabi 频率 Ω ，则实验室表象下的哈密顿量为^[82]：

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\Omega \cos(\omega t + \phi) \sigma_x. \quad (3.29)$$

转入以 ω 旋转的参考系，并采用旋波近似（RWA），可得有效哈密顿量：

$$H_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_x \cos \phi - \sigma_y \sin \phi), \quad \Delta \equiv \omega - \omega_0. \quad (3.30)$$

定义广义 Rabi 频率 $\Omega_R \equiv \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ ，则单个驱动脉冲的演化算符为：

$$U_p(\phi, t) = \cos \frac{\Omega_R t}{2} I - i \sin \frac{\Omega_R t}{2} \left[\frac{\Delta}{\Omega_R} \sigma_z + \frac{\Omega}{\Omega_R} (\sigma_x \cos \phi - \sigma_y \sin \phi) \right]. \quad (3.31)$$

自由演化时间 T 对应的演化算符为：

$$U_0(T) = \exp\left(-i\frac{\Delta T}{2}\sigma_z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\Delta T/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\Delta T/2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

若初态为 $|0\rangle$ ，则驱动后量子比特处于 $|1\rangle$ 的概率为：

$$P_1(t) = |\langle 1 | U_p(0, t) | 0 \rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega_R t}{2} \right). \quad (3.33)$$

在共振条件 $\Delta = 0$ 下，上式退化为：

$$P_1(t) = \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right). \quad (3.34)$$

这就是实验中常见的 Rabi 振荡。通过拟合振荡频率、对比度与相位，可直接提取有效 Rabi 频率、驱动失谐及脉冲面积误差等参数。

3.3.2 Ramsey 干涉

Ramsey 方法通过两个相干脉冲与中间的自由演化区间，把频率失谐转化为可观测的干涉条纹，是表征量子比特相干性与频率漂移最常用的技术之一^[83]。标准 Ramsey 序列为：持续时间为 τ 的第一个脉冲、自由演化时间 T 、以及持续时间同为 τ 的第二个脉冲。若第二个脉冲相对于第一个脉冲的相位差为 ϕ ，则末态满足：

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = U_p(\phi, \tau) U_0(T) U_p(0, \tau) |0\rangle. \quad (3.35)$$

由此可得到一般形式的 Ramsey 激发概率：

$$P_e^{\text{Ramsey}}(T, \phi) = A_0 + A_c \cos(\phi - \Delta T) + A_s \sin(\phi - \Delta T), \quad (3.36)$$

其中：

$$A_0 = 2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} \left[\cos^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} + \left(\frac{\Delta}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} \right], \quad (3.37)$$

$$A_c = 2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} \left[\cos^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} - \left(\frac{\Delta}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} \right], \quad (3.38)$$

$$A_s = 2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} \left[\left(\frac{\Delta}{\Omega_R} \right) \sin(\Omega_R \tau) \right]. \quad (3.39)$$

当 $\Delta \approx 0$ 且取 $\Omega \tau = \pi/2$ 时，有 $A_0 = A_c = 1/4$ 、 $A_s = 0$ ，因此可化为熟知的理想表达式：

$$P_e^{\text{Ramsey}} = \frac{1}{2} \left[1 + \cos(\Delta T - \phi) \right]. \quad (3.40)$$

实验上，通过扫描自由演化时间 T 或第二个脉冲的相位 ϕ ，即可得到 Ramsey 干涉条纹。

若进一步考虑准静态频率噪声或低频磁场噪声引起的退相干，通常可用包络函数 $C(T)$ 描述对比度衰减：

$$P_e^{\text{Ramsey}} = \frac{1}{2} \left[1 + C(T) \cos(\Delta T - \phi) \right], \quad C(T) = \exp \left[- \left(\frac{T}{T_2^*} \right)^\beta \right]. \quad (3.41)$$

其中 T_2^* 为非回波（free-induction）相干时间， β 则反映噪声谱形。由 Ramsey 条纹包络的衰减规律，便可定量表征量子比特的相干性能。在后续系统中，这类相位可追踪的自由演化模型将用于校准 Raman 门序列的参考相位与慢漂移补偿，也是量子线路运行期间实施在线频率跟踪的基础。

3.4 量子态探测与 SPAM 误差

本节讨论 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细量子比特（约定 $|0\rangle$ 为暗态、 $|1\rangle$ 为亮态）的荧光态探测方法，并进一步分析状态制备与测量误差（state preparation and measurement error,

SPAM error) 的来源与量化方式。对于 369 nm 直接荧光探测, SPAM 误差的主要来源包括: (i) $|0\rangle$ 态制备不完美; (ii) 非共振散射导致的亮态到暗态或暗态到亮态翻转; (iii) 光子计数统计涨落以及 PMT 暗计数、杂散光等背景计数引起的两类直方图重叠^[84-86]。在本文中, 这一模型的意义不仅是给出单离子读出保真度, 更在于为后续 RB/CRB、Bell/GHZ 态保真度提取和多比特线路输出分布修正提供统一的测量层描述。若进一步面向量子纠错, 测量误差矩阵是综合征判读与解码器设计的基础: 不准确的读出模型会导致解码器做出错误的纠正操作, 反而引入额外的逻辑错误。因此, 对 SPAM 的精细建模与标定不仅关乎当前实验精度, 也是系统走向纠错的必要准备。

3.4.1 荧光探测技术

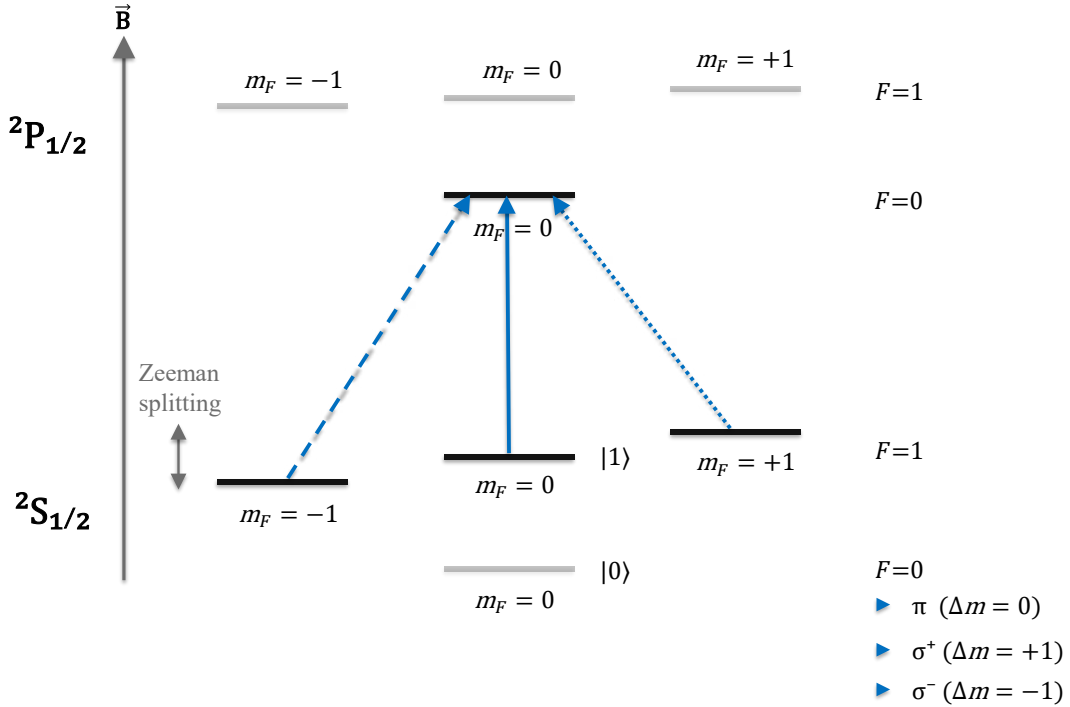


图 3.5 $^{171}\text{Yb}^+$ detecting 过程中 369 nm 激光能级示意图。亮态处于近闭合循环散射, 而暗态由于超精细失谐基本不散射, 从而构成态依赖荧光探测的基础。

如图 3.5 所示, 探测时使用特定频率边带的 369 nm 光驱动 $2S_{1/2}(F=1) \rightarrow 2P_{1/2}(F'=0)$ 跃迁, 使亮态 $|1\rangle$ 处于近似闭合的循环散射中并产生大量荧光光子; 而暗态 $|0\rangle$ 由于与探测光存在较大的超精细失谐, 在理想情况下几乎不散射。实验上只要在给定探测窗口内收集到足够多的光子, 就可以将“有荧光”判为亮态、“几乎无荧光”判为暗态。根据量子力学的统计性质, 所有实验的量子态读取结果 (一

般称为 point) 均由 N 次 (通常不低于 100 次) 重复实验 (一般称为 shot) 的探测结果统计而来。

3.4.2 $^{171}\text{Yb}^+$ 369 nm 荧光探测光子散射率

在 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细比特的荧光探测中, 共振光驱动亮态的循环跃迁, 使 $|1\rangle$ 产生大量散射光子, 而 $|0\rangle$ 在理想情况下几乎不散射。由于体系包含 Zeeman 子能级并可能形成相干暗态, 实际散射率会受到偏振与 Zeeman 分裂的影响。在最优实验参数下, 如图 3.5 所示近闭合循环的实际散射率可写为^[84]:

$$R_{0,\text{opt}} = \frac{\Gamma}{6} \frac{s_0}{1 + \frac{2}{3}s_0 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2}, \quad s_0 \equiv \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}, \quad (3.42)$$

其中 Γ 为 $^2\text{P}_{1/2}$ 态线宽, Ω 为等效 Rabi 频率, Δ 为探测光相对循环跃迁的失谐。

当离子在探测开始时处于亮态 $|1\rangle$ 时, 探测光除驱动 $^2\text{S}_{1/2}(F=1) \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}(F=0)$ 外, 还会以小概率失谐激发到 $^2\text{P}_{1/2}(F=1)$, 随后自发辐射可能将体系泵浦到另一超精细态, 从而在探测窗口内发生亮态翻转。亮态 $|1\rangle$ 泵浦到暗态 $|0\rangle$ 的速率 (Noek 文中记为 R_d) 在大失谐近似下为^[84]:

$$R_d \approx \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{\Gamma}{2}\right) \left(\frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}\right) \left(\frac{\Gamma}{2\Delta_{\text{HFP}}}\right)^2, \quad (3.43)$$

其中 Δ_{HFP} 为 $^2\text{P}_{1/2}$ 超精细分裂, 对 $^{171}\text{Yb}^+$ 而言约为 $2\pi \times 2.1$ GHz。式中的 $2/3$ 因子与相干暗态占据有关, 而 $1/3$ 为 $^2\text{P}_{1/2}(F=1)$ 向暗态 $|0\rangle$ 衰变的分支比。

相应地, 当离子在探测开始时处于暗态 $|0\rangle$ 时, 也可能通过非共振激发在探测窗口内被泵浦到亮态 $|1\rangle$ 。其翻转速率 (Noek 文中记为 R_b) 可近似写为^[84]:

$$R_b \approx \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\Gamma}{2}\right) \left(\frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}\right) \left(\frac{\Gamma}{2(\Delta_{\text{HFP}} + \Delta_{\text{HFS}})}\right)^2, \quad (3.44)$$

其中 Δ_{HFS} 为 $^2\text{S}_{1/2}$ 超精细分裂, 对 $^{171}\text{Yb}^+$ 而言约为 $2\pi \times 12.6$ GHz; 式中的 $2/3$ 则对应 $^2\text{P}_{1/2}(F=1)$ 向亮态流形衰变的总分支比。

此外, 无论离子初态如何, 探测过程中还会存在 PMT 暗计数和杂散光背景, 统一记为 R_{dc} 。为描述探测窗口内的计数分布, 设探测时间为 t_{det} , 并将固体角、光学透过率和探测器量子效率等因素合并为总探测效率 η 。定义理想亮态在整个探测窗口内的平均探测光子数为:

$$\lambda_0 \equiv \eta R_{0,\text{opt}} t_{\text{det}}, \quad (3.45)$$

同时记无量纲翻转参数为:

$$\alpha_b \equiv \frac{R_d}{R_{0,\text{opt}}}, \quad \alpha_d \equiv \frac{R_b}{R_{0,\text{opt}}}. \quad (3.46)$$

亮态 ($s=1$) 的光子计数分布: 若忽略背景, 并进一步假设离子在一个探测窗口内至多发生一次 $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ 翻转, 则翻转发生时刻 t 的概率密度为 $f_b(t) = R_d e^{-R_d t}$ 。

给定翻转时刻 t 后, 亮态散射只发生在区间 $[0, t]$ 内, 因此信号计数服从泊松分布:

$$\Pr(n_{\text{sig}} = n | t, s = 1) = \frac{\left(\lambda_0 \frac{t}{t_{\text{det}}}\right)^n}{n!} \exp\left[-\lambda_0 \frac{t}{t_{\text{det}}}\right]. \quad (3.47)$$

对翻转时刻积分后, 总计数分布为^[85]:

$$p_1(n) = e^{-R_d t_{\text{det}}} \frac{\lambda_0^n}{n!} e^{-\lambda_0} + \int_0^{t_{\text{det}}} dt R_d e^{-R_d t} \frac{\left(\lambda_0 \frac{t}{t_{\text{det}}}\right)^n}{n!} \exp\left[-\lambda_0 \frac{t}{t_{\text{det}}}\right]. \quad (3.48)$$

暗态 ($s = 0$) 的光子计数分布: 同理, 暗态发生 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ 翻转的概率密度为 $f_d(t) = R_b e^{-R_b t}$ 。若翻转发生在时刻 t , 则亮态散射只发生在剩余时间区间 $[t, t_{\text{det}}]$, 对应平均信号计数为 $\lambda_0(1 - t/t_{\text{det}})$ 。由此可得^[85]:

$$p_0(n) = e^{-\alpha_d \lambda_0 / \eta} \left[\delta_{n,0} + \frac{\alpha_d / \eta}{(1 - \alpha_d / \eta)^{n+1}} \frac{1}{n!} \Gamma(n+1, (1 - \alpha_d / \eta) \lambda_0) \right]. \quad (3.49)$$

其中 $\delta_{n,0}$ 为 Kronecker 函数, 对应在整个探测窗口内都未发生翻转且未探测到信号光子的事件。

考虑背景计数后的分布: 背景计数通常可视为独立泊松过程, 其平均计数为 $\lambda_{\text{bg}} = R_{\text{dc}} t_{\text{det}}$ 。由于独立泊松变量之和仍服从泊松分布, 因此考虑背景后的总光子计数分布为:

$$\tilde{p}_s(n) = \sum_{k=0}^n p_s(k) \frac{\lambda_{\text{bg}}^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_{\text{bg}}}, \quad s \in \{0, 1\}, \quad (3.50)$$

其中 $p_s(k)$ 由式 (3.48) 或式 (3.49) 给出。

3.4.3 SPAM error 定义、缓解机制与参数标定

设真实量子态为 $s \in \{0, 1\}$, 测量输出为 $m \in \{0, 1\}$ 。定义态探测误差为:

$$\epsilon_{01} \equiv \Pr(m = 1 | s = 0), \quad (3.51)$$

$$\epsilon_{10} \equiv \Pr(m = 0 | s = 1). \quad (3.52)$$

于是可得到单比特的测量混淆矩阵 (confusion matrix):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Pr(m = 0 | s = 0) & \Pr(m = 0 | s = 1) \\ \Pr(m = 1 | s = 0) & \Pr(m = 1 | s = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{01} & \epsilon_{10} \\ \epsilon_{01} & 1 - \epsilon_{10} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

类似地, 若将态制备误差也表示为一个经典混淆过程, 则可写出制备矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{\text{prep},0} & \epsilon_{\text{prep},1} \\ \epsilon_{\text{prep},0} & 1 - \epsilon_{\text{prep},1} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

其中 $\epsilon_{\text{prep},0}$ 和 $\epsilon_{\text{prep},1}$ 分别表示目标初态为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 时的制备错误。

在一阶近似下, 单比特总 SPAM 误差可写为:

$$\epsilon_{\text{SPAM}} \approx \frac{\epsilon_{01} + \epsilon_{10} + \epsilon_{\text{prep},0} + \epsilon_{\text{prep},1}}{2}. \quad (3.55)$$

对于本工作的实验流程, 量子比特通常先被制备到 $|0\rangle$ 态, 且实验参数一般使 $\epsilon_{\text{prep},0}$ 远小于 ϵ_{01} 和 ϵ_{10} , 因此在无特别说明时可近似取:

$$\epsilon_{\text{SPAM}} \approx \frac{\epsilon_{01} + \epsilon_{10}}{2}. \quad (3.56)$$

SPAM 误差缓解 (Error Mitigation) 机制:

在多比特扩展情形下, 考虑一个包含 n 个量子比特的系统, 其计算基态张成的希尔伯特空间维度为 $K = 2^n$. 设系统在测量前的真实理想概率分布为 $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{K-1})^T$, 且满足归一化条件 $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$. 此时, 状态转移的马尔可夫过程同样可用一个 $K \times K$ 的读出误差混淆矩阵 $\mathbf{M}$ 描述, 其矩阵元为 $M_{j|i} = \Pr(\text{测量结果} = j | \text{真实态} = i)$, 且满足 $\sum_{j=0}^{K-1} M_{j|i} = 1$.

若实验中进行了 N 次独立重复测量 (shots), 得到观测频次向量 $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{K-1})^T$ ($\sum_j n_j = N$), 相应的观测概率分布为 $\mathbf{p}_{\text{obs}} = \mathbf{n}/N$. 在无限次测量的渐进极限下, 观测分布与真实分布满足简单的线性关系 $\mathbf{p}_{\text{obs}} = \mathbf{M}\mathbf{p}$. 因此, 最直观的读出误差缓解 (Readout Error Mitigation, REM) 方法是直接逆乘混淆矩阵^[87]:

$$\hat{\mathbf{p}}_{\text{inv}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}_{\text{obs}}. \quad (3.57)$$

然而, 在实际的量子信息实验中, 测量次数 N 总是有限的. 此时观测向量 $\mathbf{p}_{\text{obs}}$ 带有不可忽略的多项分布统计涨落. 随着系统规模 n 的增大, 混淆矩阵 $\mathbf{M}$ 的条件数通常呈指数级恶化, 直接求逆操作会剧烈放大这些统计噪声. 这直接导致推导出的真实分布 $\hat{\mathbf{p}}_{\text{inv}}$ 中常出现非物理的负概率 (即 $\hat{p}_i < 0$), 使其脱离了合法的概率单纯形 (Probability Simplex) 空间, 进而对后续诸如纠缠保真度提取和量子体积计算带来严重偏差.

(1) 基于最大似然估计 (MLE) 的误差缓解: 为了克服直接求逆法在小数据量下的统计失真问题, 本工作采用最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimation, MLE) 框架来重建真实的量子态概率分布. 该方法的核心思想是在满足所有物理约束的合法概率空间内, 寻找使得当前观测数据出现概率最大的真实分布 $\mathbf{p}$.

给定真实分布 $\mathbf{p}$, 测量结果频次 $\mathbf{n}$ 的发生概率服从多项分布, 其似然函数可以写为:

$$L(\mathbf{p}) = \frac{N!}{\prod_j n_j!} \prod_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{K-1} M_{j|i} p_i \right)^{n_j}. \quad (3.58)$$

忽略与参数 $\mathbf{p}$ 无关的常数项, 等价的对数似然函数为:

$$l(\mathbf{p}) = \sum_{j=0}^{K-1} n_j \log \left(\sum_{i=0}^{K-1} M_{j|i} p_i \right). \quad (3.59)$$

此时, 读出误差缓解被转化为一个带约束的凸优化问题:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \max_{\mathbf{p} \in \Delta^{K-1}} l(\mathbf{p}), \quad (3.60)$$

其中 $\Delta^{K-1} = \{p \in \mathbb{R}^K | p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$ 为 $K-1$ 维概率单纯形。

(2) 期望最大化(EM)算法的迭代求解: 由于对数项内部存在求和操作, 直接对 $l(p)$ 求导无法得到解析解。为此, 我们引入期望最大化 (Expectation-Maximization, EM) 算法来进行高效的数值迭代求解^[88]。EM 算法通过引入隐藏变量 (即测量前系统真正处于的物理态 i), 将复杂的优化问题分解为交替进行的 E 步 (期望步) 和 M 步 (最大化步)。

首先, 初始化真实概率分布估计值为均匀分布 $p^{(0)} = (1/K, \dots, 1/K)^T$ 。在第 t 次迭代中:

1. **E-step (期望计算):** 利用当前的概率估计值 $p^{(t)}$ 和混淆矩阵 M , 计算给定观测结果 j 来源于真实物理态 i 的后验概率 $q_{i|j}^{(t)}$:

$$q_{i|j}^{(t)} = \frac{M_{j|i} p_i^{(t)}}{\sum_{k=0}^{K-1} M_{j|k} p_k^{(t)}}. \quad (3.61)$$

这一步的物理意义在于, 将每一个实际观测到的计数 n_j 按后验概率 “退回” 到可能的真实态上。

2. **M-step (参数最大化):** 重新统计每个真实态 i 的期望计数值 $\hat{n}_i^{(t)}$, 并计算下一轮的概率分布估计:

$$\hat{n}_i^{(t)} = \sum_{j=0}^{K-1} n_j q_{i|j}^{(t)}, \quad p_i^{(t+1)} = \frac{\hat{n}_i^{(t)}}{N}. \quad (3.62)$$

算法在满足收敛条件 $\max_i |p_i^{(t+1)} - p_i^{(t)}| < \epsilon$ (典型如 $\epsilon = 10^{-8}$) 后终止, 输出最优估计 $\hat{p}$ 。EM 算法在数学上保证了每次迭代都会单调递增对数似然函数的值, 且由于仅涉及非负项的乘加运算, 严格避免了负概率的出现。

SPAM error 参数分析与实验标定:

(1) 态制备误差: 若忽略暗态反抽运及其他泄漏通道, 则 pumping 过程中处于 $^2S_{1/2}(F=1)$ 的布居 $P_1(t)$ 可由简单速率方程描述:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\left(\frac{1}{3}R_{sc}^{(p)}\right) P_1. \quad (3.63)$$

若在抽运开始时 $P_1(0) \approx 1$, 则:

$$P_1(t) = \exp\left[-\left(\frac{R_{sc}^{(p)}}{3}\right)t\right], \quad \epsilon_{\text{prep},0} \equiv P_1(t) = \exp\left[-\left(\frac{R_{sc}^{(p)}}{3}\right)t\right]. \quad (3.64)$$

在合适的实验条件下, 这一贡献通常可以压低到 10^{-3} 以下。

(2) 态探测误差: 实验上通常采用阈值判决法: 设定阈值 n_c (常取 $n_c = 1$), 若探测窗口内的光子计数满足 $n > n_c$, 则判为亮态 ($m = 1$); 否则判为暗态 ($m = 0$)。

由定义式 (3.51) 和式 (3.52), 可写为:

$$\epsilon_{01}(n_c; t_{\text{det}}) = \sum_{n=n_c+1}^{\infty} \tilde{p}_0(n), \quad (3.65)$$

$$\epsilon_{10}(n_c; t_{\text{det}}) = \sum_{n=0}^{n_c} \tilde{p}_1(n). \quad (3.66)$$

其中 $\tilde{p}_{0/1}(n)$ 由式 (3.50) 给出。一般而言, 提高收集效率、降低背景计数并选择合适的探测时间, 是压低测量误差的三个最直接手段。

(3) 光子计数直方图与实验估计: 为从实验上评估测量误差, 可分别制备暗态与亮态, 并重复探测 N_s 次。第 k 次实验得到的计数记为 n_k , 按整数计数或按 bin 统计后可得到直方图 $H_s(n)$, 满足:

$$\sum_n H_s(n) = N_s. \quad (3.67)$$

若直方图第 n 个 bin 的计数记为 H_n , 则其期望和方差满足:

$$\mathbb{E}[H_n] = N \tilde{p}_s(n), \quad \text{Var}(H_n) = N \tilde{p}_s(n)(1 - \tilde{p}_s(n)), \quad s \in \{0, 1\}. \quad (3.68)$$

给定阈值 n_c 后, 测量结果可写为:

$$m(n) = \begin{cases} 0, & n \leq n_c, \\ 1, & n > n_c. \end{cases} \quad (3.69)$$

从而有:

$$K_{01} \equiv \sum_{n=n_c+1}^{\infty} H_0(n) \quad (\text{真实为 0 却判为 1 的次数}), \quad (3.70)$$

$$K_{10} \equiv \sum_{n=0}^{n_c} H_1(n) \quad (\text{真实为 1 却判为 0 的次数}). \quad (3.71)$$

相应的误判概率估计量为:

$$\hat{\epsilon}_{01} = \frac{K_{01}}{N_0}, \quad \hat{\epsilon}_{10} = \frac{K_{10}}{N_1}. \quad (3.72)$$

若假定每次探测均为独立伯努利试验, 则:

$$K_{01} \sim \text{Binomial}(N_0, \epsilon_{01}), \quad K_{10} \sim \text{Binomial}(N_1, \epsilon_{10}). \quad (3.73)$$

在统计次数足够大时, 二项分布可近似为正态分布。利用 $\text{Var}(\hat{\epsilon}) = \epsilon(1 - \epsilon)/N$, 并采用 plug-in 估计 (即用 $\hat{\epsilon}$ 代替未知的 ϵ), 可得实验值的标准差近似为:

$$\sigma_{\text{norm}}(\hat{\epsilon}) \approx \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}(1 - \hat{\epsilon})}{N}}. \quad (3.74)$$

当统计次数较少时, 可进一步采用 Clopper–Pearson 精确区间或 Wilson 区间给出置信范围。对于正态分位数 z (例如 68% 时 $z = 1$, 95% 时 $z = 1.96$), Wilson 区

间写为：

$$\hat{\epsilon}_W = \frac{\hat{\epsilon} + \frac{z^2}{2N}}{1 + \frac{z^2}{N}}, \quad (3.75)$$

$$\Delta_W = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{N}} \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}(1 - \hat{\epsilon})}{N} + \frac{z^2}{4N^2}}, \quad (3.76)$$

$$\epsilon_{\text{low}} = \hat{\epsilon}_W - \Delta_W, \quad \epsilon_{\text{high}} = \hat{\epsilon}_W + \Delta_W. \quad (3.77)$$

在实际数据处理中，另一种较为直接的做法是使用 **bootstrap** 方法对原始计数序列重采样，并由数值程序直接给出误差条与置信区间。

3.5 本章小结

本章围绕 $^{171}\text{Yb}^+$ 基础操控的理论链条，对量子比特编码、离子装载、实验时序、初态制备、微波驱动以及荧光探测与 **SPAM** 建模进行了系统梳理。多普勒冷却给出了可达温度和平均声子数的数量级估计，**EIT** 冷却阐明了通过暗态干涉与 **AC Stark** 位移抑制载波、增强红边带的物理机制；**Rabi** 与 **Ramsey** 模型为后续相干操控实验提供了可直接拟合的解析表达；基于荧光计数分布的探测模型进一步明确了亮暗态翻转、背景计数和阈值判决对 **SPAM** 误差的共同贡献。更重要的是，本章将基础操控理论组织为后续高保真度寻址量子门实验可直接调用的参数化接口：钟态编码和微波相干性为跨门相位基准提供参考，低 $\bar{n}$ 初始化为 **Raman** 寻址与 **MS** 门压低热占据相关误差，**SPAM** 矩阵则为后续 **RB/CRB**、**Bell/GHZ** 保真度与 **QV** 统计提供统一的读出修正框架。从面向量子纠错的角度看，上述各环节同样构成了重复综合征提取线路中初始化、操控与判读的底层前提^[11,50]。因此，本章虽然讨论的是基础操控理论，但其落点已指向高保真度量子门与可执行量子线路所需的门级与线路级实验支撑。下一章将把本章给出的冷却、抽运、驱动与探测流程具体落实到激光、微波、成像与稳频系统中，并用实验结果对相关模型进行验证。

第4章 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控实验实现

在前两章完成离子捕获与 $^{171}\text{Yb}^+$ 基础操控理论之后，本章转向实验系统的搭建与 $^{171}\text{Yb}^+$ 比特基础操控的完整实验实现。对于 $^{171}\text{Yb}^+$ 平台而言，多波长激光（369 nm 冷却/探测、399 nm 电离、760 nm/935 nm 回泵）、微波驱动链路以及荧光成像系统共同决定了量子比特操控的可用性与重复性；参考腔稳频、温度控制和磁场屏蔽则直接关系到冷却工作点、相干时间与探测保真度^[44,51,72,89-90]。

本章的目标是将上一章的基础操控理论落实为一套稳定运行的实验系统，并为后续 Raman 寻址量子门提供频率基准、光束接口和读出能力。下面依次介绍阱平台上的基础光路、成像光路与微波驱动系统；随后说明 369 nm/399 nm、760 nm/935 nm 和 532 nm 光路的产生与输运方式，以及多路激光共用超稳腔的 PDH 锁频实现；之后给出温度稳定与磁场屏蔽方案；最后通过 Doppler 线型扫描、EIT 参数设置、光抽运初始化、微波 Rabi/Ramsey 和光子计数直方图等实验，对系统的基础操控能力进行量化表征。

4.1 阱平台基础操控实验装置

本章所述装置以第2章完成的高通光离子阱为核心，将其安装在阱平台光学桌上，并在周围集成提供量子化轴的永磁体（ $B \approx 6\text{ G}$ ）、基础操控光路、成像系统和微波微带阵列等部件。阱平台由光学平台与上方花岗岩支撑平台组成，外围则配置电子机箱、水冷机、UPS 和普通光学平台等辅助设备。系统时序由 M-Labs 公司的 ARTIQ 测控平台统一调度，实时输出与非实时数据采集最终都汇聚到上位机控制。系统总体结构如图 4.1 所示，更完整的系统实现可参考^[65,68]。系统各模块在架构上均已按照后续 Raman 寻址门与量子线路运行需求进行接口化设计，包括统一时序调度、远程可调光学元件以及并行探测链路。

4.1.1 阱平台基础操控光路

阱平台基础光路整体如图 4.2 和图 4.3 所示。为了兼顾离子化、冷却、EIT 操作与再抽运，本系统将阱平台光束划分为离子化光、冷却光、EIT 光与回泵光四类，并通过独立光纤链路送入阱平台，以降低对准耦合与后续调参之间的相互影响。图 4.3 中预留的 Raman Branch 表明，基础光路从设计之初就已与后续第 6 章的 Raman 寻址门层相衔接。

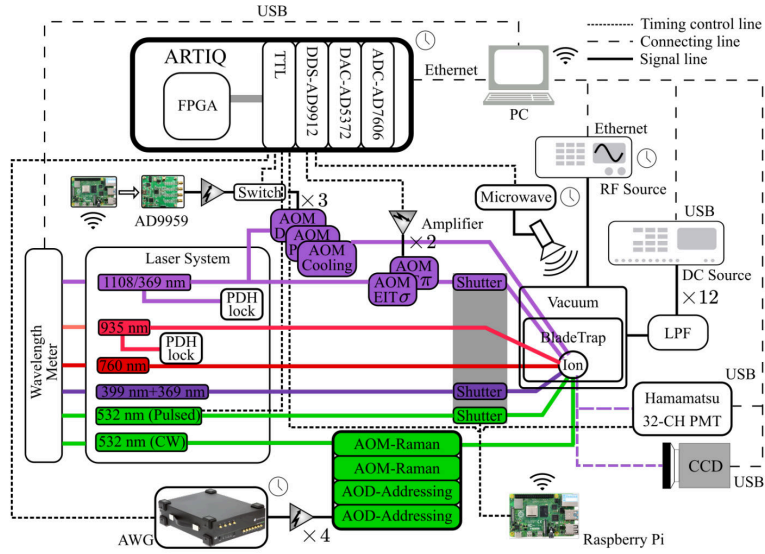


图 4.1 测控系统整体示意图。图中展示了 ARTIQ 对激光、微波、成像与数据采集链路的统一调度关系，为后续自动校准与量子线路执行提供测控框架。图源^[65]

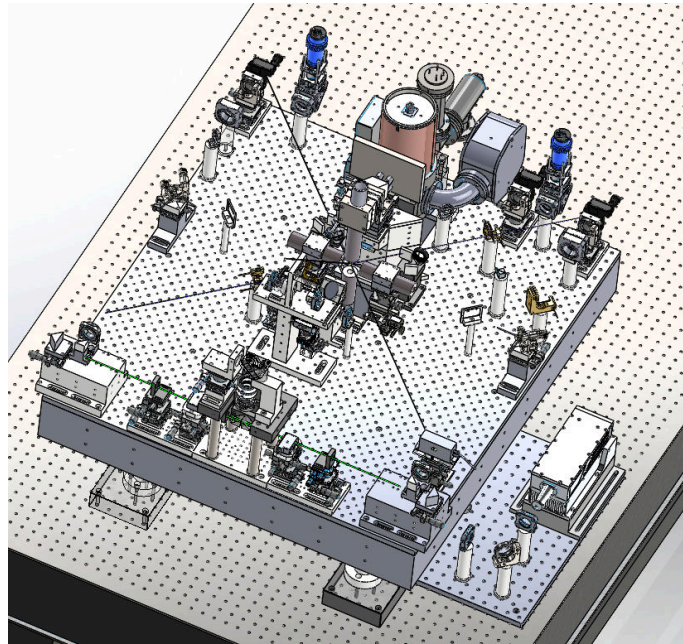


图 4.2 阱平台光路的整体三维示意图（不包括 PMT 成像光路）。阱平台基板由中间开孔的厚 50 mm 花岗岩板叠加 20 mm 厚水冷面包板构成，通过四根不锈钢支柱架设在尺寸为 1.2 m × 2.4 m 的隔振光学平台上，以兼顾光路布局的灵活性、振动稳定性及温度控制。高通光阱整体位于平台的中后部，高通光腔居中设置，上下及左右均配备大数值孔径（NA）物镜：上方物镜用于成像光路（图中未显示），两侧物镜分别用于侧向成像、Raman 激光及 EIT 光路，其余基础操控光路从不同方向以 45° 角侧入射至离子处。图中光路广泛采用电动控制器件，如电动反射镜架、电动旋转波片架及电动位移台，以确保各光路支路具有充分可调的电动自由度，便于远程调控及系统自动校准。

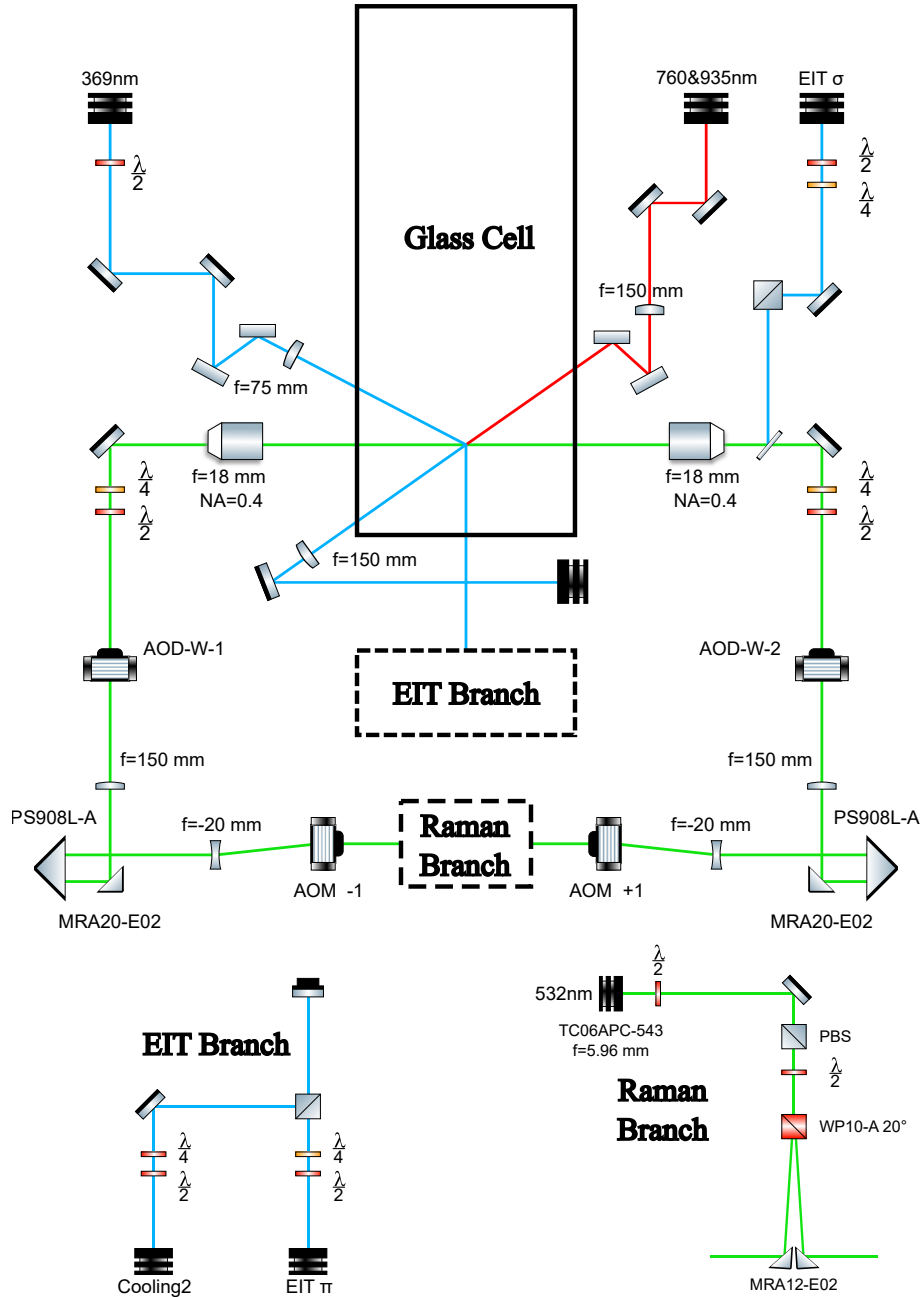


图 4.3 阱平台光路整体 2D 示意图。绿色线代表 Raman 532 nm 光，蓝色线代表 369 nm 或 399 nm 光束，红色线代表 760 nm 或 935 nm 光束；图中的 Raman Branch 也对应后续寻址量子门系统的接入位置。

离子化光：离子化光由 369 nm 与 399 nm 合束形成，从反射式光纤准直器出射后，经反射镜以水平方向 45° 入射玻璃 cell，入腔前再由凸透镜聚焦，到达离子位置处的光斑半径约为 $50\ \mu\text{m}$ 。为便于在线调节，末级反射镜采用 Newport AG-M050N 电动镜架。

冷却光：冷却光分为 Cooling1 与 Cooling2 两束。Cooling1 由光纤出射并准直后，同样以水平方向 45° 入射，入射前经过焦距为 75 mm 的透镜聚焦，到达离子处的光斑半径约为 $35\ \mu\text{m}$ 。由于玻璃 cell 对不同线偏振的透过率不同，Cooling1 出光口处

加入半波片以优化透过率；同时，冷却与光抽运对偏振态的最优条件并不完全一致，因此在该光路中进一步使用电动波片架 Newport AG-PR100，以实现偏振的精细调整。Cooling2 经分光后与 EIT- π 光合束，再经爬高机构从斜上方 45° 入射玻璃 cell；其末级反射镜同样采用 Newport AG-M050N 电动镜架，以便后续对准与漂移修正。

EIT 光：EIT 光分为 EIT- π 和 EIT- σ 两束。EIT- π 由光纤出射并准直后，经波片组调整为线偏振，并与 Cooling2 在分光棱镜处合束后共同入射，离子处光斑半径约为 $90\ \mu\text{m}$ 。EIT- σ 则单独入射，经波片组调整为圆偏振后，在右侧二向色镜处与右侧 532 nm Raman 光合束，并共同通过高 NA 物镜入腔，到达离子处的光斑半径约为 $9\ \mu\text{m}$ 。EIT- σ 光路中还设置了分光棱镜，将离子荧光耦合到侧向相机，作为一条辅助成像链路。为了方便保持圆偏振状态并补偿缓慢漂移，该支路使用了电动旋转架与 Newport AG-M100N 电动镜架。

回泵光：回泵光由 935 nm 与 760 nm 合束形成，从光纤出射并准直后，经反射镜以水平方向 45° 入射腔体，入腔前再由凸透镜聚焦，到达离子处的光斑半径约为 $110\ \mu\text{m}$ 。该支路同样采用 Newport AG-M100N 电动镜架，以便在不扰动其他光路的情况下完成重对准。

阱平台各部分激光的典型功率见表 4.1。

表 4.1 阱上基础操作光路光功率

激光名称	激光功率 (μW)
369 nm 离子化光	480
399 nm 离子化光	1030
Cooling1	23.5
Cooling2	280
EIT- π	75
EIT- σ	37
935 nm 回泵光	~ 3000
760 nm 回泵光	~ 3000

4.1.2 高通光成像光路

成像光路分为两部分：一部分位于玻璃 cell 两侧，用于实时观察离子位置与链形；另一部分位于阱上方，通过多通道光电倍增管（以下简称 MC-PMT）收集离子在态探测过程中发出的荧光，是后续多比特量子线路中并行态判读的核心链路。为了便于调试，我们额外引入一束 369 nm 反打光，通过玻璃腔下方相同的物镜在离子位置处形成类点光源，以模拟荧光并辅助完成成像光路搭建。

侧向监测光路：阱平台以离子为中心的左右两侧各布置一路水平成像系统，对应两个 CCD 相机。两侧物镜收集的荧光经二向色镜反射后进入相机；为了简化对焦与链长变化时的视场调整，两个物镜均安装在电动位移台上，可直接通过软件控制。当前系统使用的相机型号为 QHYCCD QHY5III200M，像元尺寸为 $4\mu\text{m}\times 4\mu\text{m}$ ，分辨率为 1920×1080 。

上方多通道探测光路：MC-PMT 是本系统态探测的核心器件之一，其探头模块采用滨松 H7260-200，光阴极尺寸为 $0.8\text{mm}\times 7\text{mm}\times 32$ ，通道间隔为 0.2mm 。相应的电子学读出逻辑如图 4.4 所示：电源控制线用于设置 PMT 模块增益，信号线负责输出 32 个通道的光子计数；PC 通过 USB 3.0 与 PMT 采集机箱通信，实现初始化、关闭和读数等操作；来自 ARTIQ 的 TTL 信号在此被用作 PMT_window 门控信号，当 TTL 为高电平时开始采集，回落为低电平时停止计数，并将一组 32 路、每路 8 bit 的计数结果写入 FIFO。有关多通道 PMT 的更详细原理与器件说明，可参考本组前期工作与滨松官方资料^[67,91]。这种并行判读结构不仅用于本章单离子表征，也直接支撑后续多离子态分辨、Bell 态保真度提取和量子线路统计。



图 4.4 MCPMT 信号逻辑原理图。ARTIQ 通过 TTL 门控定义探测窗口，采集机箱完成 32 路计数缓存与回传，用于并行态判读。

我们使用如图 4.5 所示的成像系统收集离子在态探测过程中发出的荧光。离子荧光先由上方 0.4NA 物镜收集，再经过三级放大后成像到 MC-PMT 表面并完成单光子计数。为了兼顾在线观察与正式探测，在第二成像点前设置了可切换的电动舵机：当舵机抬起时，光路被切换到 CCD；当舵机放下时，荧光进入 PMT 光路。通过调节最后一级透镜位置，可以改变第三级放大倍率，从而适配不同离子链长度下的成像需求。

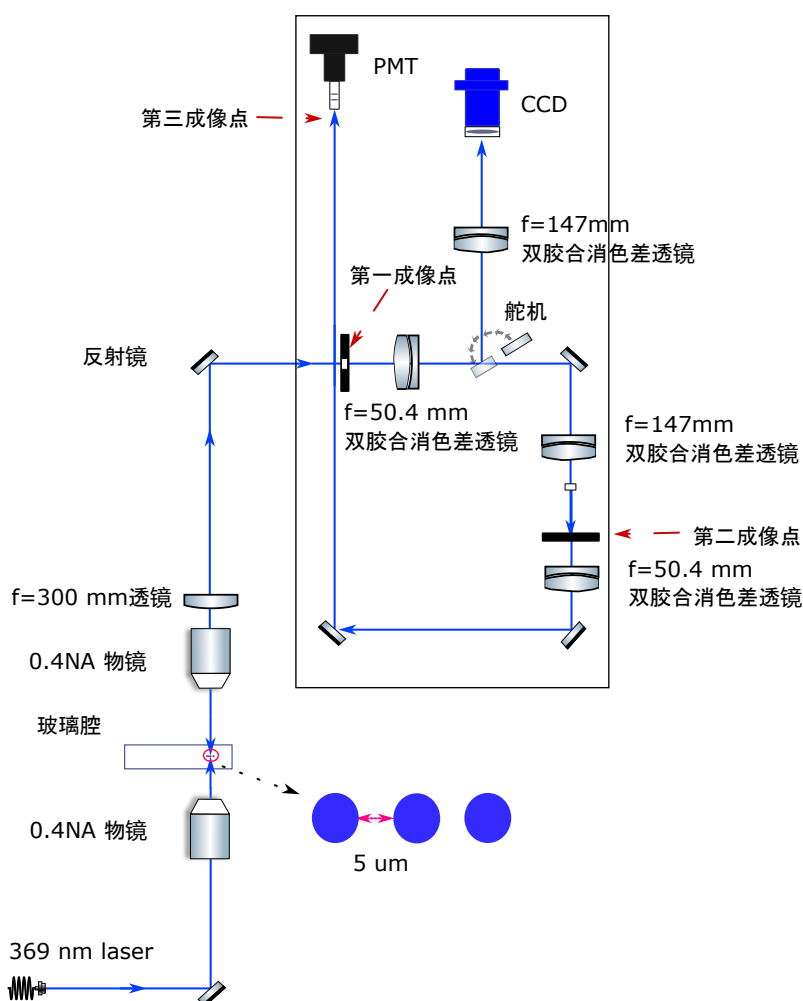


图 4.5 成像光路原理示意图。离子荧光由上方 0.4 NA 物镜收集，经三级放大后可切换成像到 CCD 或 MC-PMT，以兼顾在线观察与正式探测。

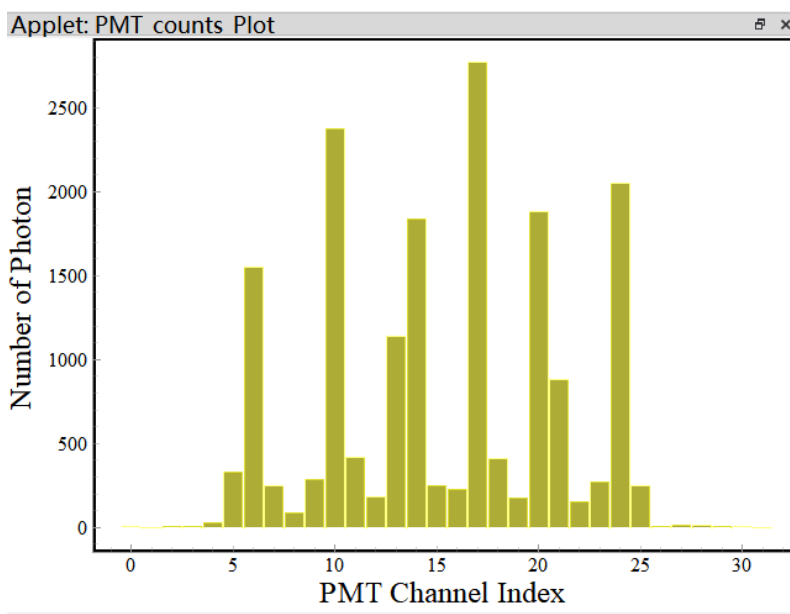


图 4.6 MC-PMT 对 6 离子链成像计数界面

4.1.3 微波驱动系统

在玻璃 cell 附近安装有一组微波微带阵列天线（型号：HD-126MAA7S），用于辐射驱动离子超精细量子比特的微波信号，其安装位置如图 4.7 所示。微波电子学链路如图 4.8 所示：信号发生器 LFS11 提供 12.4 GHz 微波，本地 ARTIQ 通道提供 200 MHz 参考信号，两路信号首先输入 MW-P1 板卡完成混频、滤波和前级放大，再输入 MW-P2 板卡进行末级放大，最大输出功率约为 35 dBm。放大后的信号通过近场微带阵列辐射到离子处；ARTIQ 输出的 DDS 信号同时承担微波开关和相位/时间序列调制的功能，从而可直接实现第 3 章所述的微波 Rabi 和 Ramsey 操作。微波链路虽非本文最终原生门的实现路径，但为后续 Raman 单比特门的频率、相位和探测链路校准提供了独立基准。

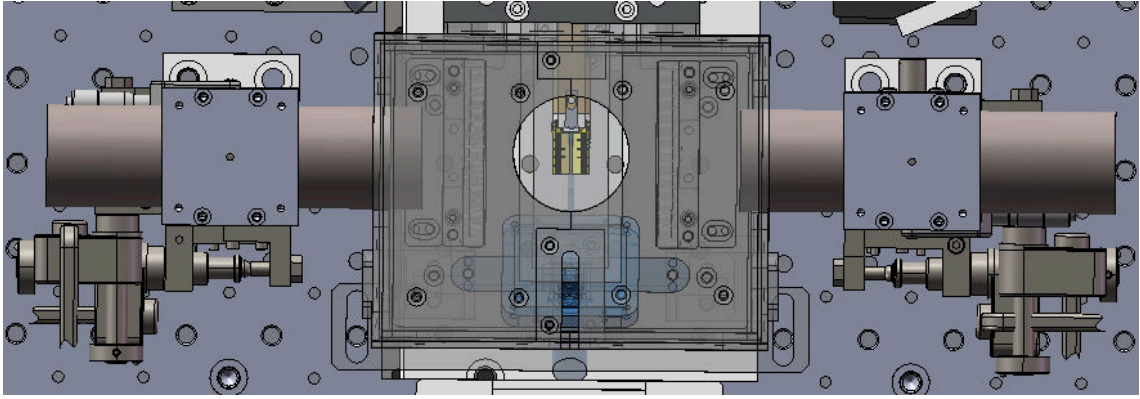


图 4.7 微波微带阵列安装位置 3D 示意图。图中间偏下方的蓝色图样为微波微带阵列天线，其位于黄色刀片结构的斜下方，用于对离子超精细量子比特施加近场微波驱动。

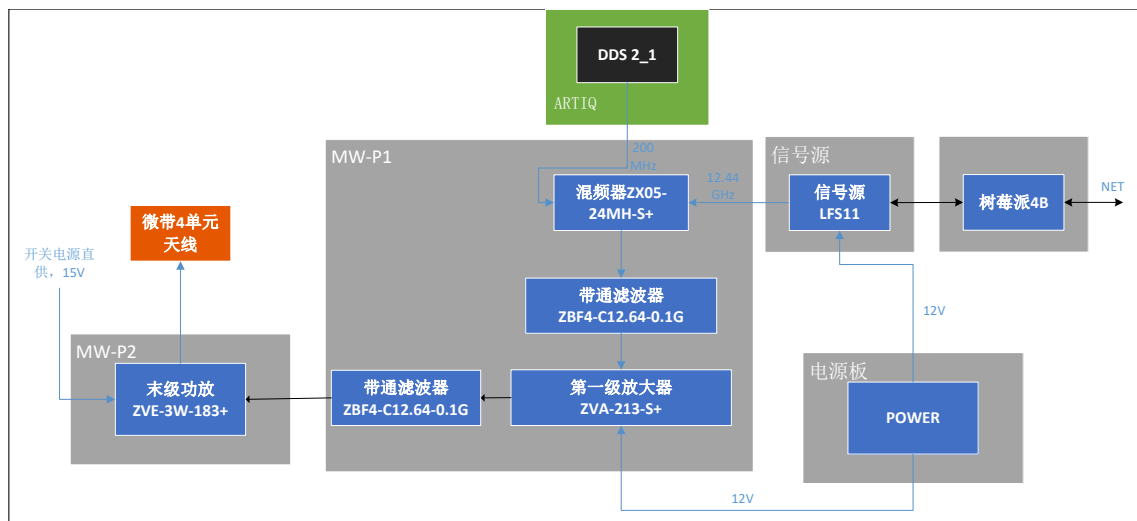


图 4.8 微波电子机箱原理示意图。系统将 12.4 GHz 微波与 200 MHz 参考信号混频并放大，用于产生可编程的单比特微波驱动。

4.2 基础操控激光产生光路

上一节从阱平台端给出了各操控支路在实验区的接口布局，本节则按照波长与功能回溯其光源产生、调制与输运链路。

4.2.1 369 nm 和 399 nm 光路

369 nm 光源与频率产生方案： 369.5 nm 对应 $^2\text{S}_{1/2} \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ 强偶极跃迁，天然线宽约为 $\Gamma/2\pi \sim 19.6\text{ MHz}$ ，适合用于多普勒冷却与荧光探测。由于紫外连续激光器在成本、可靠性和功率扩展方面存在限制，实验上常见的实现路径包括：其一，利用 739 nm（或邻近波长）外腔半导体激光器倍频产生 369 nm；其二，利用 1108 nm 掺镱光纤放大器输出经二倍频得到 554 nm，再与残余 1108 nm 和频得到 369 nm。本系统采用后一种三倍频路线，一方面可以稳定输出数十毫瓦量级的 369 nm 连续光，另一方面可直接利用 1108 nm 种子光实施参考腔锁频^[72,89-90]。

本系统所使用的 369 nm 激光器为上海频准单频光纤激光器（FL-SF-369-0.04-CW），其输出来自 1108 nm 种子光经倍频晶体倍频后，再与基频光和频产生的结果。该激光器带有气体保护模块，开机前需先打开气体保护。相应的波长调谐与锁定通过调节 1108 nm 种子激光器（FL-SF-1108-S）完成。1108 nm 光经过一级放大后首先分束：高功率支路进入 EOM 并在后级放大后倍频产生 369 nm；低功率支路继续分束，一路送往 PDH 锁频，另一路送往波长计监测，其光纤链路如图 4.9 所示。

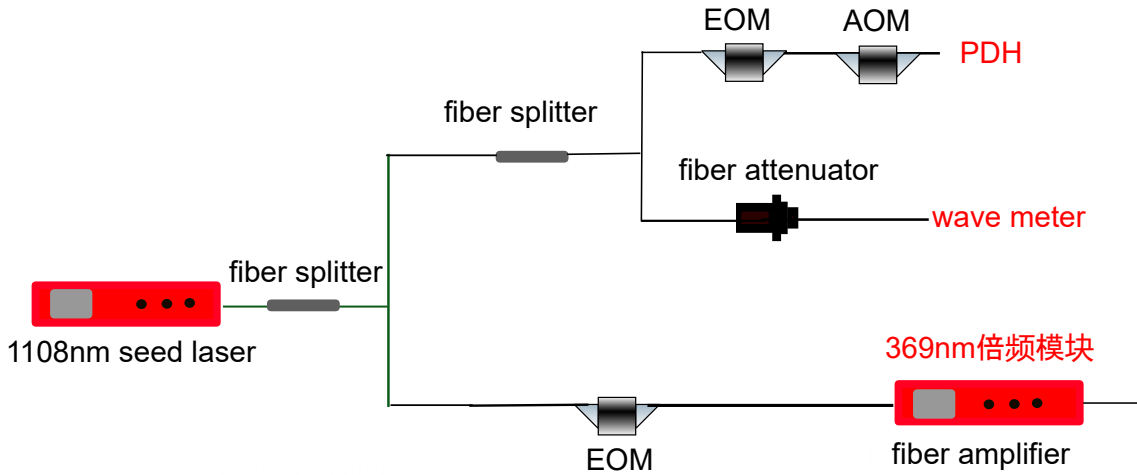


图 4.9 1108 nm 种子光光纤链路原理图。高功率支路进入 EOM 与放大/倍频模块产生 369 nm 光，低功率支路则用于 PDH 锁频与波长计监测。

在 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细体系中，369 nm 需要同时承担冷却、抽运和探测等多种功能，而这些功能对应的跃迁频率彼此相差数 GHz 到十余 GHz。为了在同一光源上获得多频成分，我们使用电光调制器（EOM）在 369 nm 上产生相位调制边带。相位调

制后的电场可写为：

$$E(t) = E_0 \exp[i\omega t + i\beta \sin(\Omega_m t)] = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \exp[i(\omega + n\Omega_m)t], \quad (4.1)$$

其中 Ω_m 为调制角频率， β 为调制深度， J_n 为第一类贝塞尔函数。通过选择合适的 Ω_m 与 β ，即可在载波附近生成所需的一阶或多阶边带，从而实现对不同实验步骤的选频。

本系统的 369 nm 边带机箱中集成了两路射频源，如图 4.10 所示。一路设置为 14.7 GHz、输出功率约 0 dBm，用于多普勒冷却；另一路设置为 2.1 GHz、输出功率约 6 dBm，用于光抽运初始化。两路信号均通过射频开关实现时序控制；为了提高隔离度并减小通道串扰，机箱内部串接了多级射频开关。当系统工作在探测模式时，两路高频调制均关闭，仅保留探测所需的工作频点。

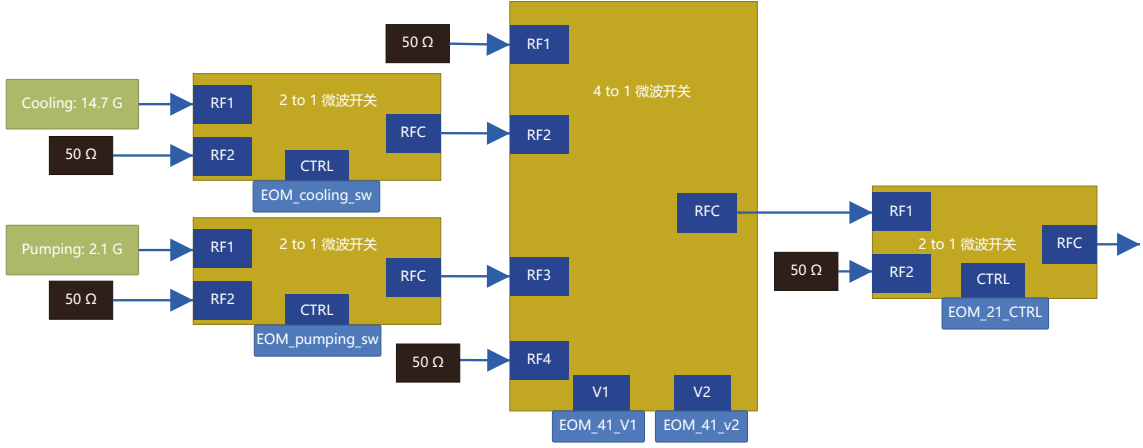


图 4.10 EOM 时序控制原理图。图中两路高频调制分别用于实现 Doppler cooling 与 optical pumping 所需的不同边带配置。

369 nm 与 399 nm 合束空间光路：如图 4.11 所示，本系统搭建了一套用于 369 nm 基础操控光与 399 nm 离子化光的阱下空间光路，并预留了 405 nm 辅助 YbH^+ 分子电离通道。

369 nm 主路由三倍频系统输出后，先经滤光片去除残余基频/倍频光，再通过两片焦距均为 75 mm 的透镜组成望远镜，对光束腰位置与束斑直径进行整形（整形后光斑直径约为 1.45 mm），从而为后续分束与 AOM 调制提供合适的入射条件。之后，369 nm 光经波片与 PBS/分光镜系统被分为离子化支路、EIT 支路与 Cooling 支路。离子化支路与 399 nm、405 nm 合束；EIT 支路进一步分成两路，并分别进入 150 MHz AOM 以实现频率移位与时序控制；Cooling 支路则分为 Cooling1 与 Cooling2，两路均配置 100 MHz AOM 以实现独立失谐与快速开关。所有 AOM 均采用 double-pass 配置，以获得较高的关断比（实测大于 10^6 ）。最后，各支路分别经过波片与非球面透镜耦合入保偏光纤，传输至阱平台。

399 nm 光用于中性 Yb 原子的 $^1\text{S}_0 \leftrightarrow ^1\text{P}_1$ 强允许跃迁选择性激发。系统所用激

光器为上海频准单频光纤激光器 (FL-SF-399-0.04-CW)，其输出由 1595 nm 种子光经倍频晶体四倍频得到；波长调谐与锁定则通过调节 1595 nm 种子激光器完成。399 nm 输出端滤光片用于抑制 798 nm 基频泄漏；其后一部分功率分出进入 PDH 锁频支路，另一部分送往波长计，主路最终耦合入光纤并与 369 nm 离子化支路在空间重合。

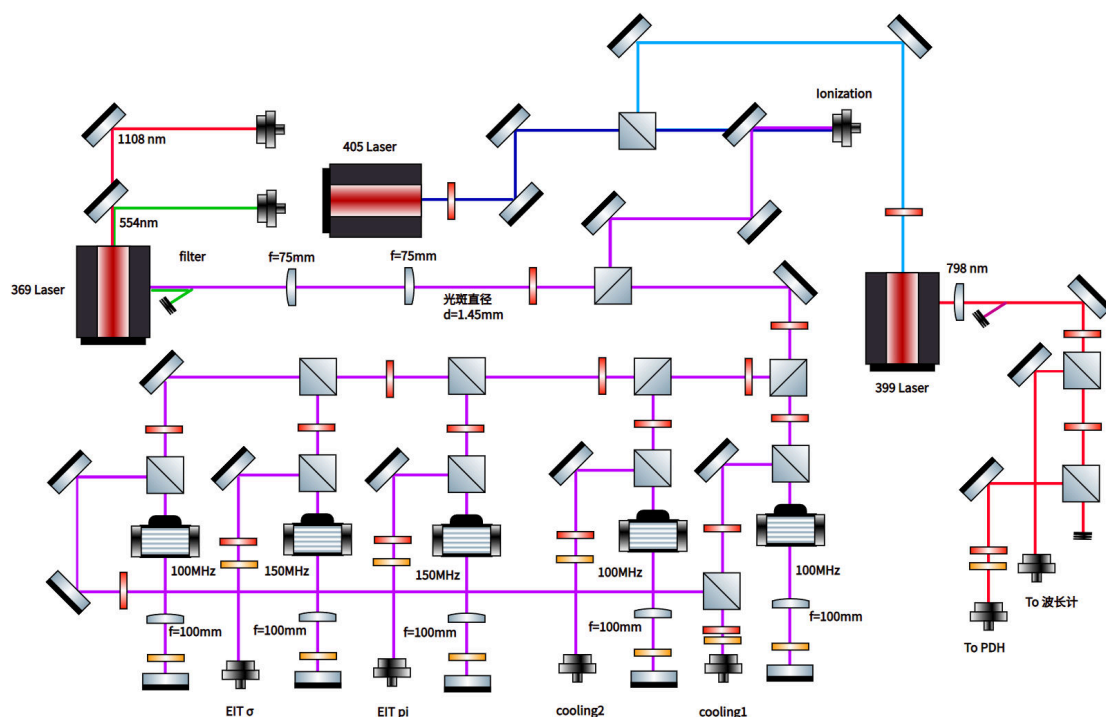


图 4.11 369 nm 和 399 nm 阱下空间光路。图中给出了离子化、Cooling 与 EIT 支路的分束、AOM 调制及光纤耦合关系。

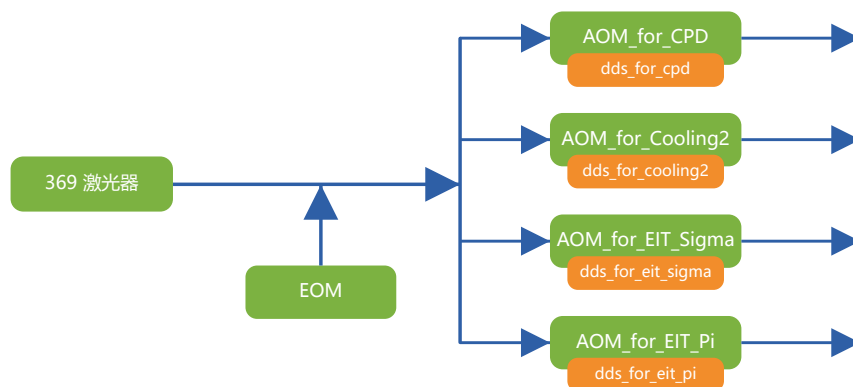


图 4.12 AOM 时序控制原理图。各支路的 DDS 信号独立控制 Cooling1、Cooling2、EIT- σ 与 EIT- π 光束的频移与通断。

通过 EOM 侧的射频开关 (TTL 信号) 与 AOM 侧的 DDS 信号协同控制，我

们可以在实验中按需切换 369 nm 的频率成分与各空间支路的通断，从而实现第 3 章所讨论的多普勒冷却、EIT 冷却、光学抽运和探测等功能。相应的典型逻辑真值表见表 4.2。

表 4.2 不同操作时序下 EOM 与 AOM 控制信号真值表：1 表示开启/高电平，0 表示关闭/低电平

	多普勒冷却	EIT 冷却	光学抽运	控制	探测
EOM_cooling_sw	1	1	0	0	1
EOM_pumping_sw	0	0	1	0	0
EOM_41_V1	0	0	1	1	0
EOM_41_V2	0	0	1	0	0
EOM_21_CTRL	1	1	1	0	1
dds_for_CPD	1	0	1	0	1
dds_for_Cooling2	1	0	0	0	1
dds_for_eit_sigma	0	1	0	0	0
dds_for_eit_pi	0	1	0	0	0

4.2.2 760 nm 和 935 nm 光路

回泵光由 935 nm 和 760 nm 两路激光合束形成，用于把分别落入 D 态和 F 态的离子重新抽回冷却循环^[72,74]。其中，935 nm 光需要加载约 3.1 GHz 的边带，以避免非共振激发造成的泵浦效率下降；760 nm 光需要加载约 5.18 GHz 的边带，用于清除落入长寿命 F 态的布居。在实际使用中，我们通过 EOM 为两束光加载所需边带，并让 760 nm 激光器工作在扫描模式，使其波长在目标区间内往复扫描，以提高回泵稳健性。

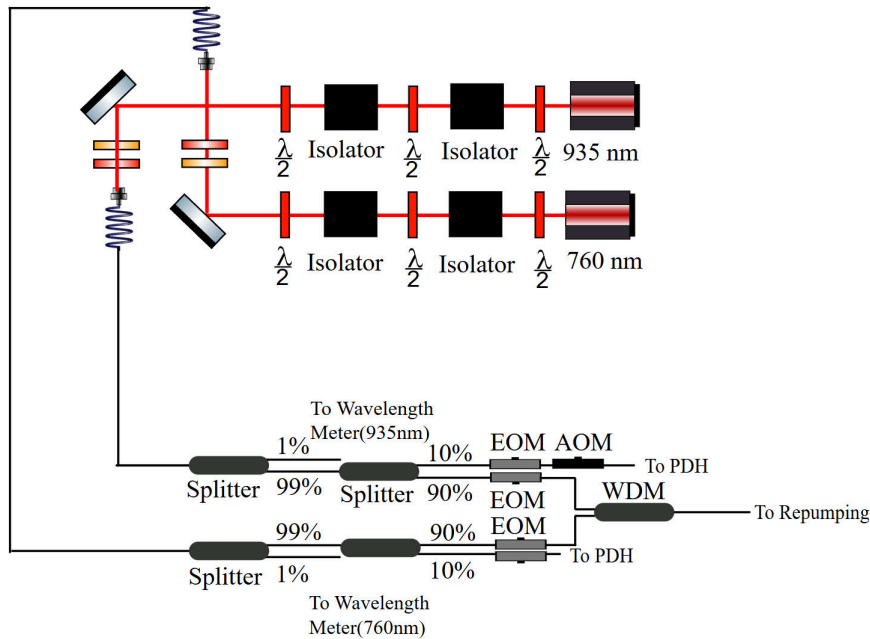


图 4.13 760 nm 和 935 nm 光路原理图

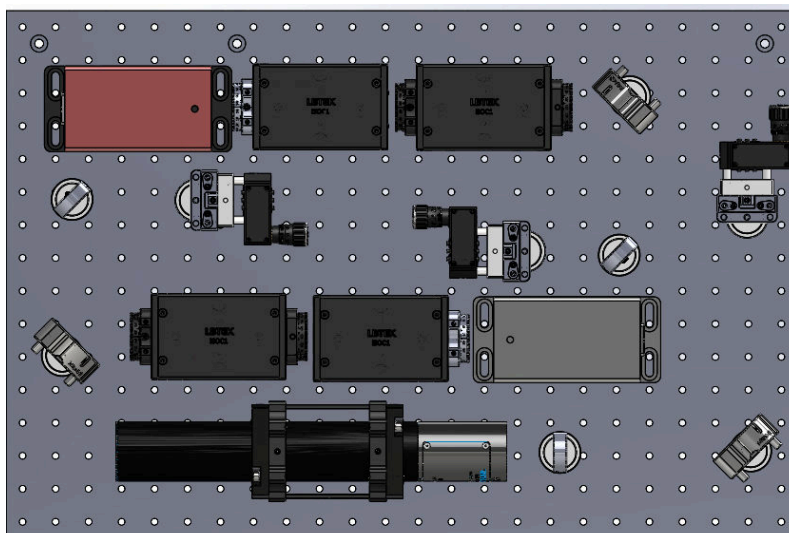


图 4.14 760 nm 和 935 nm 空间光路示意图

如图 4.13 所示，760 nm 和 935 nm 光路分为空间光路模块和光纤光路模块。系统所使用的激光器均为优立光太 DFB 半导体激光器，型号分别为 DFB801-935 与 DFB801-760；其波长调谐与锁定通过 BNC 口加载外部反馈信号实现，扫描信号幅值范围为 -8 V 到 $+8\text{ V}$ 。

空间光路模块与一套用作波长参考的 He-Ne 激光器（HRS015B）共同安装在一块尺寸为 $600\text{ mm} \times 400\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ 的定制不锈钢面包板上，如图 4.14 所示。为避免回反射损伤激光器，光路中使用了两只 LBtek 空间光隔离器（ISO935/760-3-1.5W），单只隔离度均大于 30 dB。光纤光路模块则集成在邻近的自制机箱中，各类光纤器件固定在定制插箱内，所需的射频源和放大器也一并置于该机箱中。

4.2.3 532 nm 烧蚀装载光路

本系统配备了两种镱靶材：一种为自然丰度靶材，用于优先囚禁 $^{174}\text{Yb}^+$ ；另一种为提纯后 $^{171}\text{Yb}^+$ 含量较高的靶材，用于正式装载量子比特离子。由于 $^{171}\text{Yb}^+$ 的能级结构更复杂、冷却条件更严格，因此实验上通常先使用 $^{174}\text{Yb}^+$ 完成基础定标（例如光路对准与束腰位置优化），再切换到 $^{171}\text{Yb}^+$ 进行正式实验。为避免反复调整烧蚀光路，我们在设计时保留了两条烧蚀分支，分别对应两种靶材，如图 4.15 所示。这类“烧蚀装载 + 光电离”的方案已被证明适合高通光、紧凑型离子阱装置^[51,77-78]。

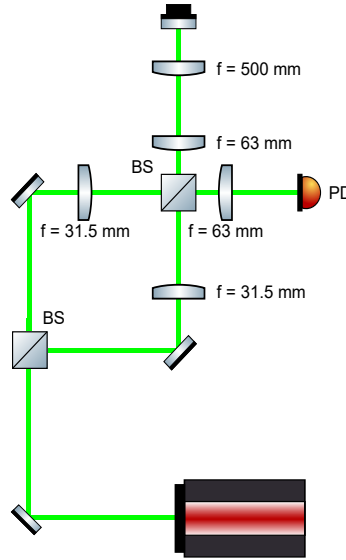


图 4.15 532 nm 烧蚀装载光路原理图。两条烧蚀分支分别对应自然丰度靶材与富集 $^{171}\text{Yb}^+$ 靶材，用于减少不同装载任务之间的重复重对准。

在烧蚀光路设计中，需要尽量减小靶材处的光斑半径。激光烧蚀只有在功率密度超过阈值时才能稳定产生原子束；光斑过大不仅需要更高的脉冲能量，还容易一次性喷射过多原子而恶化真空度，严重时会在刀片电极与玻璃内表面形成沉积，导致电极短路或通光率下降。为满足功率密度要求，我们首先测得激光器出光斑直径约为 2 mm；经透镜整形后，最终到达靶材处的光斑直径约为 30–60 μm ，满足烧蚀装载需求。

4.2.4 PDH 锁频系统

PDH（Pound–Drever–Hall）锁频通过对入射光施加射频相位调制，并利用参考腔反射信号解调得到色散型误差信号，是离子阱实验中实现激光窄线宽和长时稳定的标准方法之一^[89-90]。在本系统中，我们采用该方法同时对 1108 nm（用于倍频产生 369 nm）、1064 nm（用于倍频产生 Raman 光 532 nm，将在第 6 章介绍）、935 nm 和 798 nm（用于倍频产生 399 nm）四路激光进行稳频。

本系统使用单个超稳腔同时实现四路激光锁定，超稳腔实物如图 4.16 所示。其自由光谱范围为 1.5 GHz，精细度约为 2000。超稳腔安装在独立真空腔内；系统先使用分子泵预抽到 10^{-4} Pa 以下，再启动溅射离子泵将腔体维持在 10^{-8} Pa 量级。为减小腔长热漂移，我们在腔体外表面加装加热膜与亚克力防护外壳，并利用温控模块 TCM-M207 进行主动控温，温控精度约为 0.002 K。该模块可通过串口与上位机通信，便于在线设置与监测。

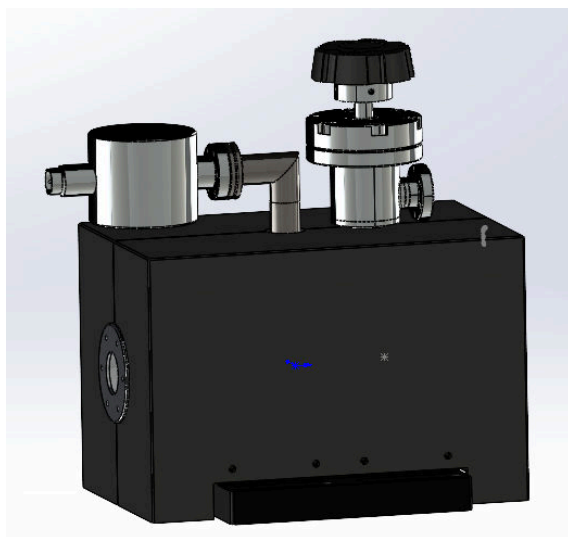
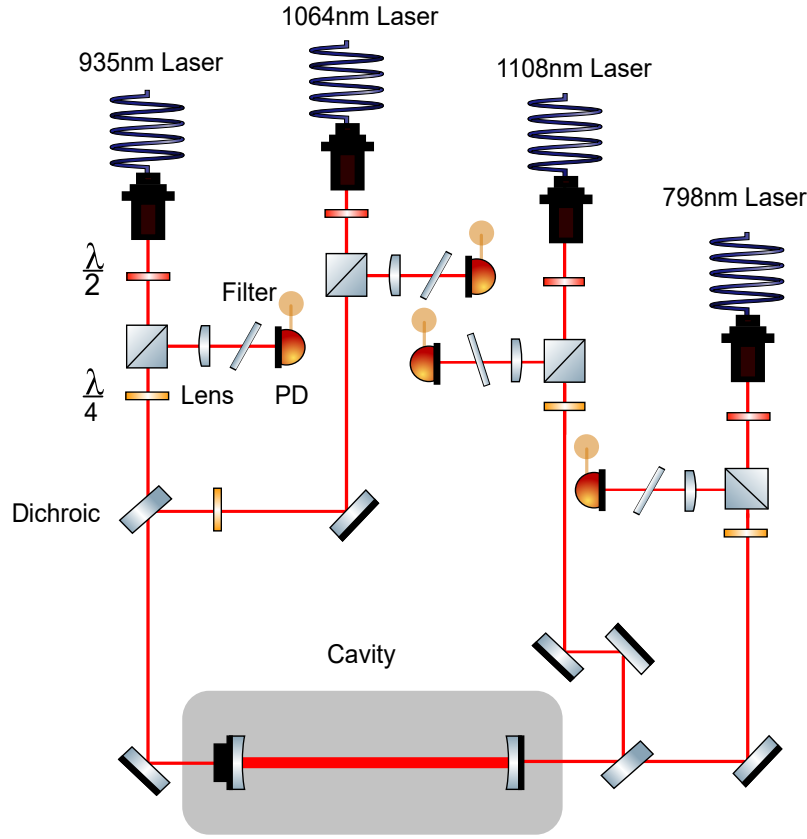
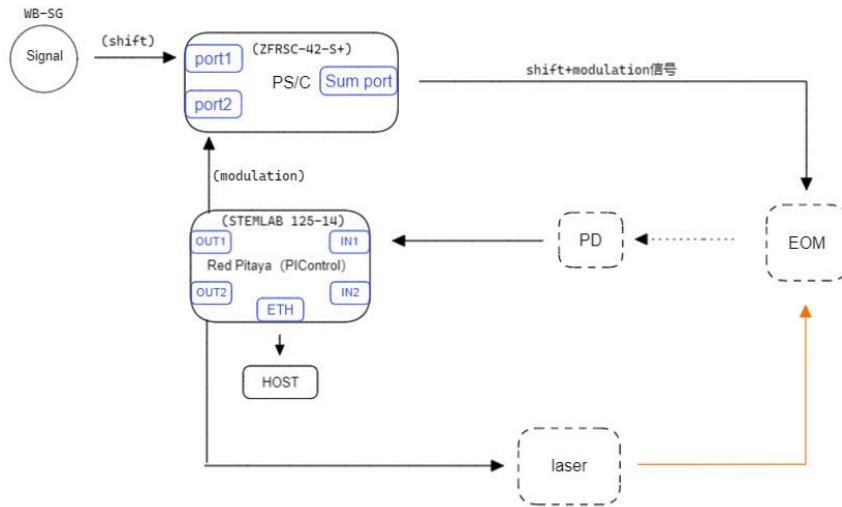


图 4.16 超稳腔 3D 图。该参考腔为多路基础操控激光与后续 Raman 激光提供统一频率基准。

超稳腔的光学链路与电子学链路分别如图 4.17(a) 和图 4.17(b) 所示。四路待锁激光中, 1108 nm 与 1064 nm 由种子光预放模块经分束后直接进入锁频链路; 798 nm 与 935 nm 则先经空间光耦合进入光纤。以 1108 nm 支路为例, 激光先经过光纤 EOM 调制, 再经波片、PBS 等元件耦合进超稳腔; 腔反射信号由 Thorlabs 光电探测器采集后送入电子机箱, 经过混频、低通与 PID 环节生成反馈电压, 最终加载到激光器扫描端口。1108 nm 和 1064 nm 支路使用铟镓砷探测器 PDA05CF2, 798 nm 和 935 nm 支路使用硅探测器 PDA10A2。



(a) 超稳腔光路原理图



(b) PDH 锁频电子机箱原理图

图 4.17 超稳腔原理图。(a) 给出共享参考腔的光学耦合链路；(b) 给出对应的 PDH 锁频电子学实现。

在电子学实现上，每一路 PDH 模块都包含两类调制信号：一类是由 WB-SG 提供的 Shift 信号，用于产生可调的移频边带；另一类是由火龙果板 FPGA 提供的 Modulation 信号（通常为 15 MHz 和 20 MHz），用于完成相敏解调并生成误差信号。实验中将移频边带锁定到超稳腔模上后，只需调节 Shift 信号频率即可实现激光工作点的灵活移动。该结构兼顾了稳频与扫频需求，便于对不同原子跃迁进行在线

标定，为基础操控与后续 Raman 寻址提供了统一的频率参考。

4.3 温度稳定与磁屏蔽系统

温度波动会引起 AOM/AOD、光学支架与腔体结构的慢漂移，进而影响光束指向、功率稳定度和门操作相位；磁场波动则会通过 Zeeman 支路偏移冷却、抽运与微波操控的工作点。为提高系统的日间稳定性，本平台同时引入了温度稳定与磁屏蔽两套环境控制措施。

首先，我们制作了一套包覆阱平台的温控箱，用于被动保温，其三维结构如图 4.18 所示。温控侧板采用多层叠加结构：外层为 ABS 与聚氨酯保温板封装，内层则使用螺钉固定 2 mm 厚的坡莫合金，从而兼顾热隔离与磁屏蔽。

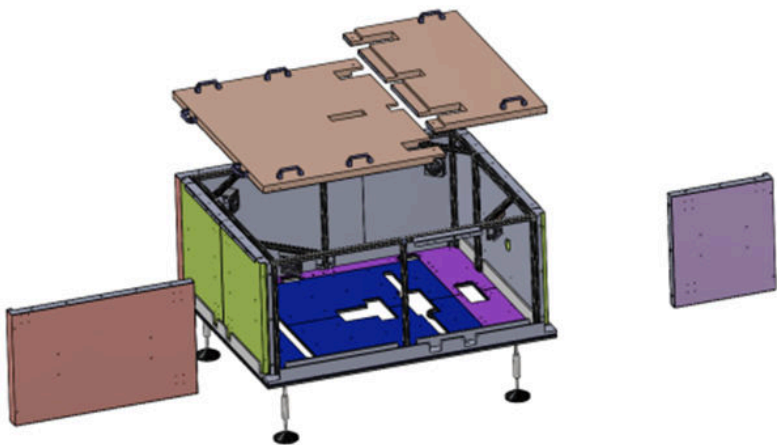


图 4.18 温控箱 3D 示意图。温控箱采用保温层与坡莫合金屏蔽层叠加设计，以同时抑制热漂移和外界磁场扰动。

在被动保温基础上，我们进一步采用二级 TEC 水冷主动控温方案，如图 4.19 所示。具体做法是在阱平台下方铺设带水道的面包板，并将 TEC 控温的循环水注入其中；同时，对 AOM、AOD 等温度敏感器件额外引入独立水冷支路，以减小局部热源引起的慢漂移。

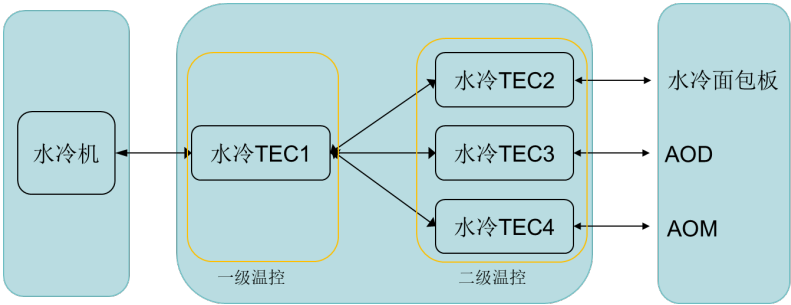


图 4.19 TEC 二级水冷温控原理图。系统同时对阱平台基座以及 AOM/AOD 等温度敏感器件实施主动热管理。

为了评估控温效果，我们在阱平台内部布置了多个温度探头，监测结果见图 4.20。与外部实验环境相比，阱平台内部温度漂移被压低了近两个数量级；在数天量级的连续运行中，温度波动始终控制在 0.04°C 以内。这表明在数小时量级的门标定与线路采样过程中，基础操控层的工作点可保持足够稳定。



图 4.20 温控后 48 h 温度监测结果：(a) 外部环境温度波动；(b) 温控箱内温度波动。内外环境对比表明温控箱显著压低了长时间漂移。

在磁场稳定方面，我们进一步在玻璃 cell 附近增设了一层坡莫合金磁屏蔽盒，其结构示意图如图 4.21 所示。该屏蔽盒与外层温控箱中的磁屏蔽层共同构成两级磁屏蔽体系。

通过监测离子能级漂移，可进一步反推出离子处磁场强度的变化。Zeeman 能级与磁场关系满足：

$$\omega_{\text{Zeeman}}(t) = B \delta_{\text{Zeeman}}, \quad \delta_{\text{Zeeman}} = 2\pi \times 1.4 \text{ MHz/G}, \quad (4.2)$$

在本实验中：

$$\omega_{\text{Zeeman}}(0) = B_0 \delta_{\text{Zeeman}} = 8.7752296 \text{ MHz}. \quad (4.3)$$

Hyperfine 钟跃迁频率与磁场的关系为：

$$\omega_{\text{HF}} = \omega_{\text{HF},0} + B^2 \delta_{\text{HF}}, \quad \delta_{\text{HF}} = 2\pi \times 310.8 \text{ Hz/G}^2. \quad (4.4)$$

本实验分别利用 $|F=0, m_F=0\rangle \leftrightarrow |F=1, m_F=0\rangle$ 的微波 Ramsey 序列监测 ω_{HF} ，以及 $|F=0, m_F=0\rangle \leftrightarrow |F=1, m_F=1\rangle$ 的微波 Ramsey 序列监测 Zeeman 分裂。结合两者的变化，可以同步推算微波频率漂移及磁场变化。设参考磁场为 B_0 ，对应初始 Hyperfine 频率为 $\omega_{\text{HF},0}$ 。当钟跃迁 Ramsey 使用微波频率 ω_{MW} 时，测得失谐量为 Δ_{HF} ；当 Zeeman 支路 Ramsey 使用微波频率 $\omega_{\text{MW}} + B_0 \delta_{\text{Zeeman}}$ 时，测得失谐量为 Δ_{Zeeman} ，则有：

$$\Delta_{\text{HF}} = \omega_{\text{MW}} - (\omega_{\text{HF},0} + B^2 \delta_{\text{HF}}), \quad (4.5)$$

$$\Delta_{\text{Zeeman}} = \omega_{\text{MW}} + B_0 \delta_{\text{Zeeman}} - (\omega_{\text{HF},0} + B \delta_{\text{Zeeman}}). \quad (4.6)$$

由式 (4.5) 与式 (4.6) 可得到关于 B 的二次方程:

$$\delta_{\text{HF}} B^2 - \delta_{\text{Zeeman}} B + \Delta_{\text{HF}} - \Delta_{\text{Zeeman}} + B_0 \delta_{\text{Zeeman}} = 0. \quad (4.7)$$

求解即可得到 B 。我们根据此方法对磁场进行长期监测, 结果如图 4.22 所示, 系统在约 2 h 时间内的磁场强度漂移约为 $34 \mu\text{G}$; 这一水平足以满足基础操控与后续 Raman 寻址量子门对量子化轴稳定性的要求。

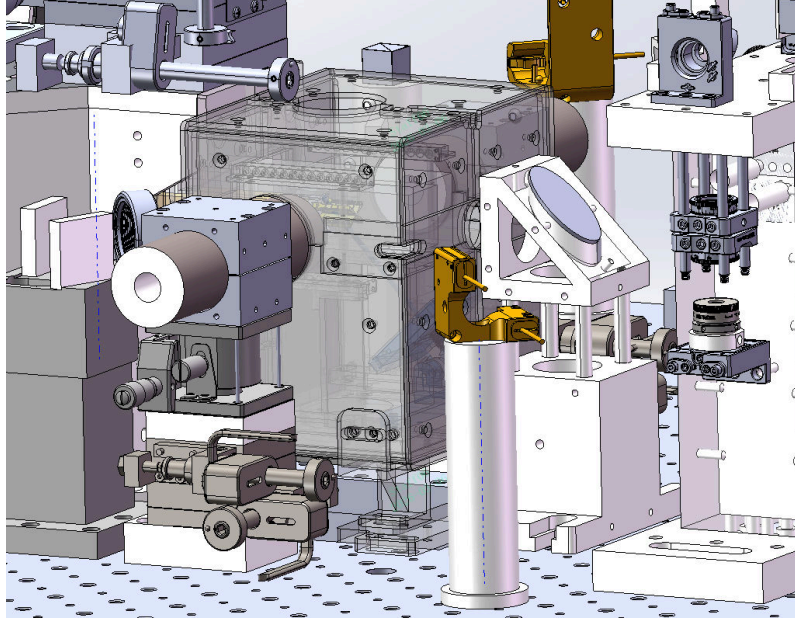


图 4.21 内层磁屏蔽盒 3D 示意图 (图中半透明部分)

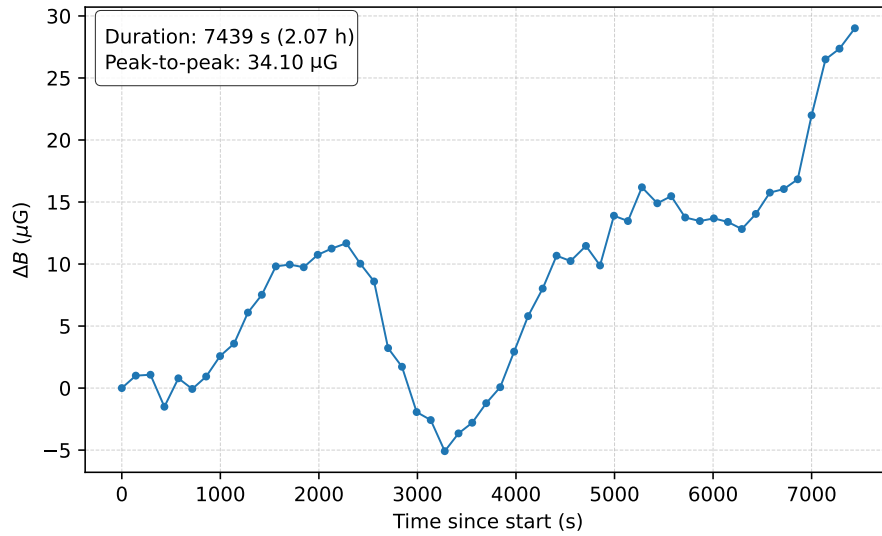


图 4.22 磁场强度大小监测。实验结果表明系统在约 2 h 时间内的磁场强度漂移约为 $34 \mu\text{G}$ 。

4.4 量子比特基础操控实验

完成以上装置搭建后, 使用 532 nm 脉冲激光烧蚀靶材, 同时将离子化光 (大红失谐 369 nm 与 399 nm)、369 nm 基础操控光以及 760 nm/935 nm 回泵光对准阱中心, 电离 Yb 原子并初步冷却 $^{171}\text{Yb}^+$ 以实现离子捕获。在调节到合适的 RF 与 DC 工作点后, 我们可以稳定获得目标数目的离子链 (见第 2 章), 并通过 MC-PMT 观察离子的荧光计数。下面依次给出基础操控实验结果。

4.4.1 冷却与初态制备

Doppler 频标校准: 由于系统最初并不具备绝对精确的频率参考 (波长计绝对精度仅为几十 MHz), 因此在正式实验前需要利用离子的固有天然跃迁谱线作为绝对频率参考完成频标对准, 并寻找最佳冷却工作点。实验上, 我们扫描 369 nm 冷却光对应 AOM 的驱动频率, 并使用 PMT 记录离子荧光计数, 从而得到式 (3.2) 所描述的 Doppler 线型, 如图 4.23 所示。曲线中心对应离子共振频率; 在其红失谐一侧可选择较优的 Doppler 冷却工作点。本实验中冷却工作点选在约 10 MHz 红失谐附近。值得注意的是, 当扫描越过共振进入蓝失谐区域后, 离子在极短时间内被加热到较大声子数, 荧光随之急剧下降, 图中右侧计数接近零即源于此。

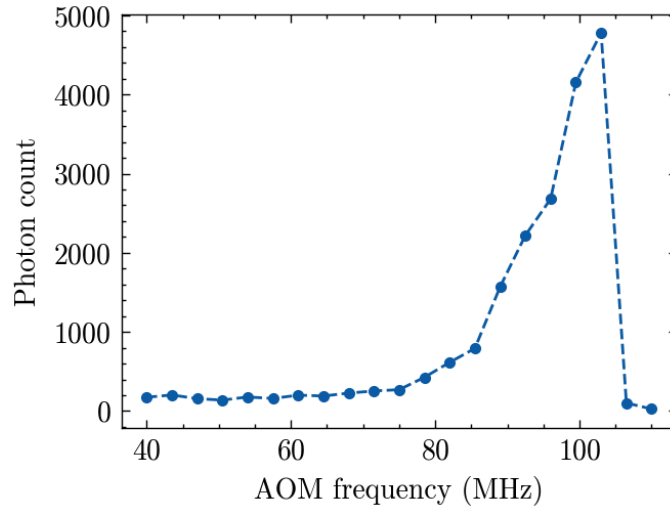


图 4.23 369 nm 频率扫描 Doppler 线型实验图。该结果用于确定离子共振位置并选择约 10 MHz 红失谐的冷却工作点。

EIT 冷却工作点: 在 Doppler 冷却后, 离子平均声子数一般已降到 10 以内; 若要进一步降低运动态布居, 则需要引入 EIT 冷却。其基本原理已在第 3 章讨论, 这里仅说明实验实现。依照图 4.3 所示光路, 我们将两束共振 369 nm 光耦合到 $^{171}\text{Yb}^+$ 的 S-P 能级上, 构成 Λ 型系统。实验参数选择遵循式 (3.25) 所给出的条件, 并要求两光子失谐满足 $\delta \simeq 0$, 即暗共振对准载波^[80-81,92]。表 4.3 给出本工作所采用的一组典型参数。声子数的精确定标将在后续 Raman 章节通过边带谱完成, 这里

不再单独展开 EIT 冷却极限的测量。

表 4.3 $^{171}\text{Yb}^+$ 369 nm EIT 冷却的典型实验参数

参数名	典型值
塞曼劈裂	$\delta_B/(2\pi) = 8.86 \text{ MHz}$
单离子阱频	$\{\omega_x, \omega_y\}/(2\pi) = \{1.9 \text{ MHz}, 1.8 \text{ MHz}\}$
探测光失谐	$\Delta_p/(2\pi) = 90 \text{ MHz}$
EIT 两光子相对失谐	$(\Delta_p - \Delta_d)/(2\pi) \approx 10.7 \text{ MHz}$
功率与 Rabi (驱动光)	$37 \mu\text{W}$: $\Omega_e/(2\pi) = 17.2 \text{ MHz}$
功率与 Rabi (探测光)	$75 \mu\text{W}$: $\Omega_\pi/(2\pi) = 8.9 \text{ MHz}$

光学抽运初态制备：在完成运动冷却后，我们将 369 nm 光切换到光学抽运模式，把离子初始化到 $|0\rangle$ 。相应的验证序列如图 4.24 所示：先进行冷却，再施加长度为 t 的抽运脉冲，最后通过荧光探测读取结果。图 4.25 给出了初始化效果随抽运时间的变化。综合初始化效率与序列时长，我们选择约 $10 \mu\text{s}$ 的抽运时间作为后续实验参数。需要说明的是，该测试序列本身包含最终探测过程，因此图中的残余概率同时包含了制备误差与探测误差；根据第 3 章的 SPAM 分析，制备误差应低于 10^{-3} 量级，因此图中残余主要受 $|0\rangle$ 态探测误差限制。

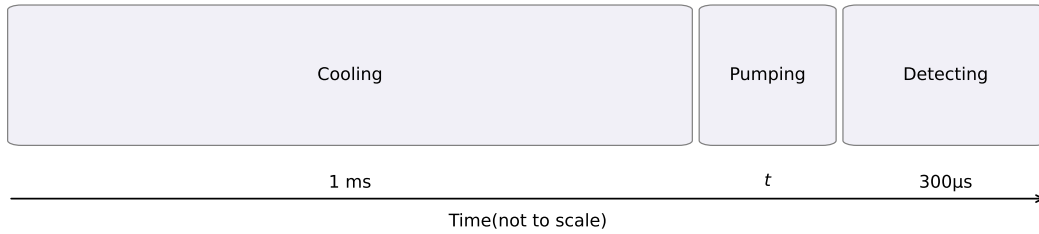


图 4.24 光学抽运测试时序图

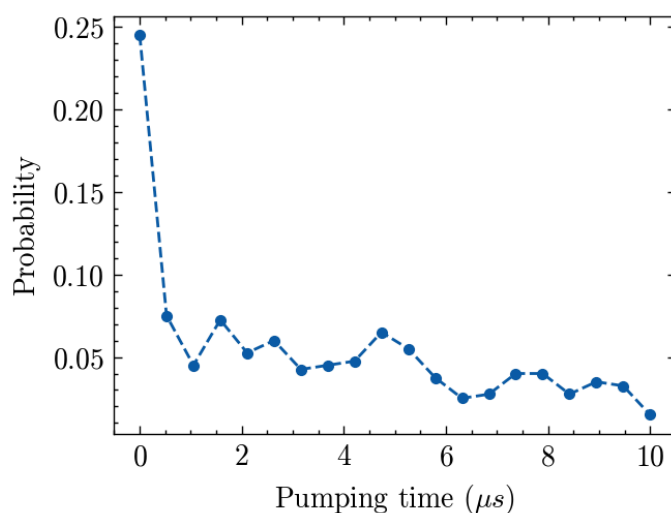


图 4.25 抽运时间扫描初态制备效果实验图。残余概率同时包含初始化误差与最终探测误差。

4.4.2 微波 Rabi 和 Ramsey

在完成初态制备后，我们使用前文搭建的微波系统驱动离子超精细量子比特，以验证系统的基础单比特操控能力。图 4.26 给出了微波 Rabi 实验时序：在冷却和光学抽运之后，施加长度为 t 的微波脉冲，再进行态探测。实验结果如图 4.27 所示，可以清楚观察到高对比度的 Rabi 振荡，说明微波链路能够稳定驱动钟态量子比特。

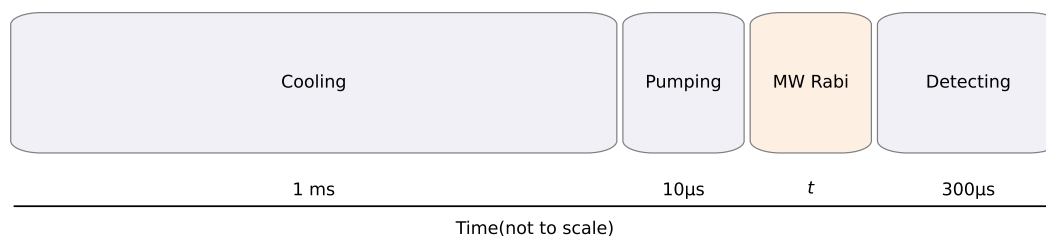


图 4.26 微波 Rabi 时序图

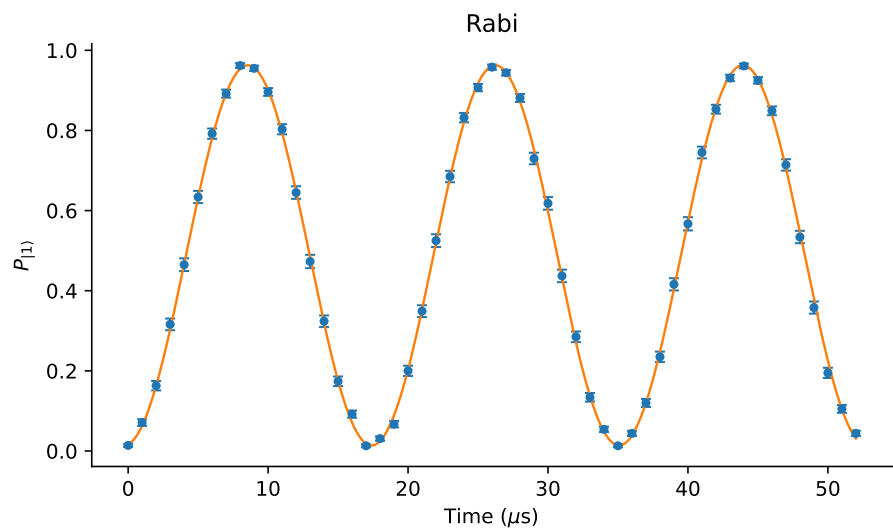


图 4.27 微波 Rabi 实验图。高对比度振荡表明微波驱动链路可作为后续 Raman 标定的独立相干基准。

为了表征比特相干性，我们进一步进行了 Ramsey 实验。实验中将微波频率相对共振点失谐 1 kHz，对应时序如图 4.28 所示，实验结果如图 4.29 所示。在约 3 ms 的自由演化时间范围内，Ramsey 条纹未见明显衰减；拟合结果表明，微波操控下的离子内态相干时间大于 50 ms。这一结果表明钟态量子比特的相干时间远超典型量子门操作时长（微秒量级），为后续高保真 Raman 门序列提供了充足的相干裕量。

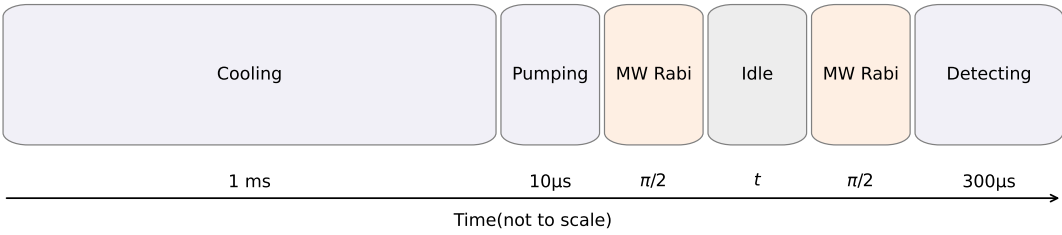


图 4.28 微波 Ramsey 时序图

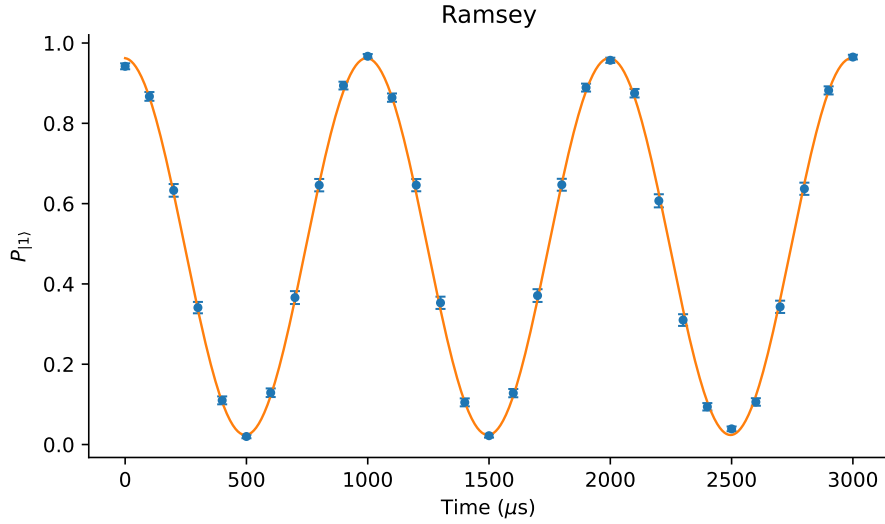


图 4.29 微波 Ramsey 实验图。拟合结果表明自由演化时间在毫秒量级内仍保持清晰干涉条纹。

4.4.3 光子计数直方图

第 3 章已经给出了基于光子计数直方图评估 SPAM 的理论模型；在实验上，这一工具同样是调节偏振、功率、探测时间和阈值判决条件的直接反馈手段^[84-85]。在系统搭建完成后，先通过直方图分离度粗调各参数，再结合误判率迭代优化，最终得到图 4.30 所示的结果。

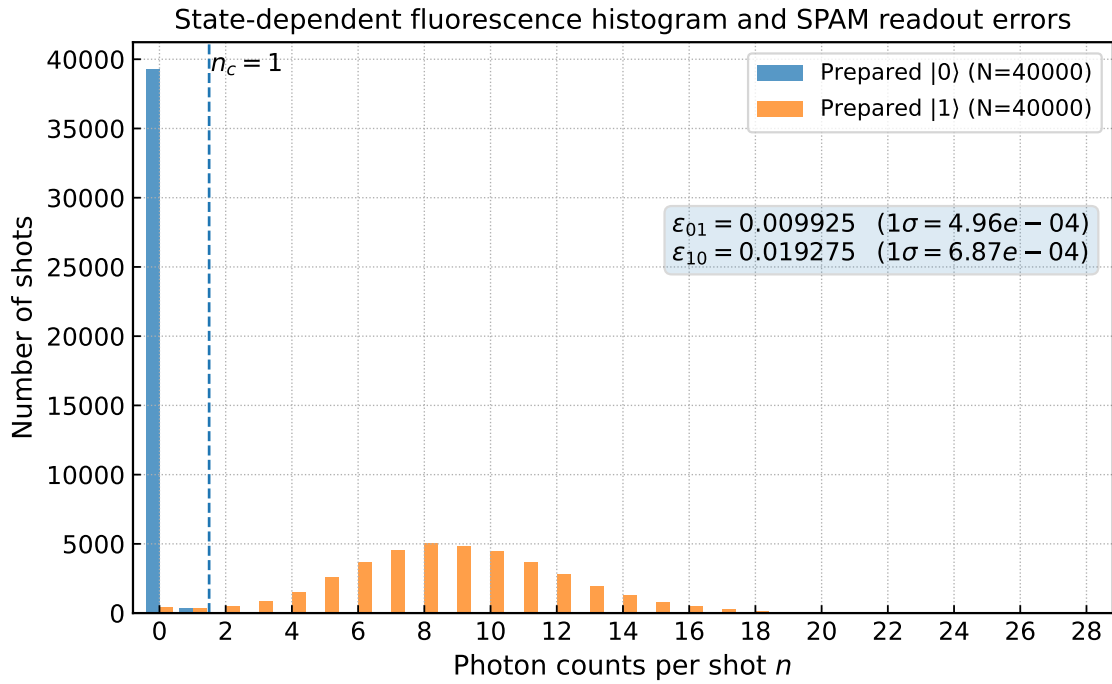


图 4.30 光子计数直方图。图中给出了阈值 $n_c = 1$ 下的亮暗态计数分布及对应的读出误判率。

从图 4.30 可以看到，优化后暗态与亮态的计数分布已经较好分离。若取判决阈值 $n_c = 1$ ，则暗态误判率与亮态误判率分别约为 $\epsilon_{01} \sim 0.01$ 和 $\epsilon_{10} \sim 0.02$ ，与第 3 章基于失谐散射与泊松统计建立的量级估计相一致。表 4.4 汇总了本工作在 SPAM 优化中采用的一组典型实验参数。

表 4.4 SPAM 相关实验参数汇总

参数	代表符号	实验典型值
抽运时间	τ_p	$\sim 10 \mu\text{s}$
探测时间	τ_d	$\sim 300 \mu\text{s}$
暗态平均计数	λ_0	~ 0.1
亮态平均计数	λ_1	~ 9
判决阈值	n_c	1
暗态误判 ($0 \rightarrow 1$)	ϵ_{01}	~ 0.01
亮态误判 ($1 \rightarrow 0$)	ϵ_{10}	~ 0.02

若要进一步降低 SPAM，可将当前 0.4 NA 物镜升级为更大 NA 的收集物镜，或使用更高量子效率、更低暗计数的探测器；另一条路径是采用 shelving 等态选择探测方式^[93-94]。当前的 SPAM 标定已能够为后续多比特线路实验提供稳定的读出基线。

4.5 本章小结

本章围绕 $^{171}\text{Yb}^+$ 基础操控系统的实验实现，完成了阱平台光路、成像探测、微波驱动、多波长激光链路、PDH 稳频以及温度/磁场稳定系统的搭建与表征。在此基础上，实现了单离子的 Doppler 频标校准、EIT 参数配置、 $10 \mu\text{s}$ 量级的光学抽运初始化、微波 Rabi 振荡和超过 50 ms 的 Ramsey 相干表征，并通过光子计数直方图把读出误差优化到 $\epsilon_{01} \sim 0.01$ 、 $\epsilon_{10} \sim 0.02$ 的水平。这些结果表明本平台已具备稳定的单比特初始化、操控与读出能力，为后续 Raman 寻址量子门实验提供了频率基准、环境稳定性与并行判读等底层支撑。

第5章 基于 Raman 操作的离子量子门理论

面向容错量子计算的离子阱处理器，需要在长时间、深量子线路的重复运行中保持高保真度的可寻址门操作。对于以 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细基态编码量子比特的体系，受激 Raman 操作提供了连接“可寻址单比特旋转”与“高保真两比特纠缠门”的统一物理接口：两束远失谐光场的频差可等效驱动量子比特跃迁，使单比特门的幅度、相位与空间作用范围能够通过射频合成与光学链路精确编程；同时，借助光场动量差与集体振动模的耦合，同一套 Raman 硬件还可构造 Mølmer-Sørensen (MS) 门，作为量子线路编译中的原生纠缠原生门^[18,20,95]。

在实际实验中，Raman 操作既带来灵活的门构造能力，也引入了与高保真度实现直接相关的系统误差来源。对于单比特门，主要问题包括 differential AC Stark shift、Rabi 频率漂移、残余两光子失谐以及由热运动引起的 Debye-Waller 抑制；对于两比特 MS 门，则还需同时处理相空间闭合条件、几何相位匹配、多模参与、红蓝边带不平衡和运动退相干等因素^[96-98]。这些误差项并非彼此独立，而是通过寻址光路的稳定性、频率合成方式以及脉冲波形设计共同映射到量子线路的误差预算之中。

本章的目标是建立一套能够直接服务于第6章实验标定与波形优化的理论框架。首先从有效哈密顿量出发，建立 $^{171}\text{Yb}^+$ 体系中远失谐 Raman 操作的理论模型，给出双光子 Raman Rabi 频率、微分 AC Stark shift 以及多频 Raman 情形下四阶光移的统一表述；随后，介绍 MS 门的相空间图像与基本构造条件，并给出实验上常用的 Bell 态保真度测量公式；在此基础上，对单比特门、两比特门以及采样与读出过程中的主要误差来源进行分类与量级估算；最后，结合多离子链场景讨论幅度调制与平滑调制门 (smooth gate) 等波形工程方法。上述内容共同构成第6章 Raman 操控系统标定、参数优化与误差分析的理论基础。

5.1 受激 Raman 操作与单比特门（以 $^{171}\text{Yb}^+$ 为例）

5.1.1 电磁场作用下的二能级 Rabi 模型

二能级 Rabi 模型的形式表达已在第三章给出，此处从光与原子相互作用的物理图像出发重新推导哈密顿量，以便后续自然过渡到远失谐 Raman 驱动^[18,99]。设量子比特由两本征态 $|g\rangle, |e\rangle$ 构成，其自由哈密顿量可写为：

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \quad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (5.1)$$

其中 $\hbar\omega_0$ 为能级劈裂。考虑经典电磁场驱动 $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$ 与电偶极相互作用 $H_I = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$ 。在电偶极近似下，偶极矩算符在二能级子空间的非零矩阵元为 $\mathbf{d}_{eg} = \langle e | \mathbf{d} | g \rangle$ 及其共轭。引入升降算符 $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ 、 $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ ，则：

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{eg}\sigma_+ + \mathbf{d}_{ge}\sigma_-, \quad (5.2)$$

并可将驱动相互作用写成：

$$\begin{aligned} H_I(t) &= -(\mathbf{d}_{eg}\sigma_+ + \mathbf{d}_{ge}\sigma_-) E_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= -\frac{E_0}{2} (\mathbf{d}_{eg}\sigma_+ + \mathbf{d}_{ge}\sigma_-) (e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

定义单光子（或等效）Rabi 频率：

$$\Omega \equiv \frac{E_0}{\hbar} \mathbf{d}_{eg} \cdot \hat{\mathbf{e}}, \quad (5.4)$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}$ 为场的偏振方向（此处已将几何因子吸收入 Ω ）。在 $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ 基中，相互作用哈密顿量可写为：

$$H_I(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ e^{-i(\omega t + \phi)} + \sigma_- e^{i(\omega t + \phi)} + \text{h.c.}). \quad (5.5)$$

其中包含两类快速振荡项： $\sigma_+ e^{-i\omega t}$ 与 $\sigma_- e^{i\omega t}$ 。为揭示其物理含义，将系统转入以驱动频率旋转的相互作用表象：取么正变换 $U_r(t) = \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\sigma_z\right)$ ，定义旋转系波函数 $|\tilde{\psi}\rangle = U_r |\psi\rangle$ 。则旋转系哈密顿量为：

$$\tilde{H} = U_r(H_0 + H_I)U_r^\dagger - i\hbar U_r \dot{U}_r^\dagger. \quad (5.6)$$

注意到 $U_r \sigma_\pm U_r^\dagger = \sigma_\pm e^{\pm i\omega t}$ ，以及 $-i\hbar U_r \dot{U}_r^\dagger = -\hbar\omega\sigma_z/2$ 。代入并整理得到：

$$\tilde{H}(t) = \frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{2} \sigma_z - \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ e^{-i\phi} + \sigma_- e^{i\phi}) - \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ e^{i(2\omega t + \phi)} + \sigma_- e^{-i(2\omega t + \phi)}). \quad (5.7)$$

第一项给出失谐 $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ ；第二项为“慢变”的共振耦合；第三项仍以 2ω 快速振荡，对应反旋项（counter-rotating terms）。当满足：

$$|\Omega| \ll \omega, \omega_0, \quad (5.8)$$

且我们关心的演化时间尺度远大于 $1/\omega$ 时，快速振荡的反旋项对平均动力学贡献很小，可在时间平均意义下忽略，这就是旋波近似（rotating-wave approximation, RWA）^[18]，在 RWA 下：

$$\tilde{H}_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta}{2} \sigma_z - \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ e^{-i\phi} + \sigma_- e^{i\phi}) = \frac{\hbar}{2} (\Delta\sigma_z - \Omega\sigma_\phi), \quad (5.9)$$

其中 $\sigma_\phi \equiv \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi$ 。于是系统在 Bloch 球上以 Rabi 频率 $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ 绕方向 $\mathbf{n} = (-\Omega \cos \phi, -\Omega \sin \phi, \Delta)/\Omega_R$ 旋转。

5.1.2 Λ 系统中的双光子 Raman 跃迁

远失谐 Raman 驱动的核心思想，是利用两束光场经由虚激发态把基态 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 有效耦合起来，从而在不显著占据真实激发态的前提下实现等效二能级操控。对于 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细量子比特，我们记

$$|0\rangle \equiv |F=0, m_F=0\rangle, \quad |1\rangle \equiv |F=1, m_F=0\rangle, \quad \omega_{01}/2\pi \simeq 12.642 \text{ GHz}.$$

实验上通常采用两束频率分别为 ω_0 与 ω_1 的远失谐光场形成双光子过程；对本文采用的 532 nm Raman 系统而言，单光子失谐量远大于单光子 Rabi 频率和两光子失谐，因此适合采用绝热消除（adiabatic elimination）得到基态子空间中的有效哈密顿量^[18,99]。

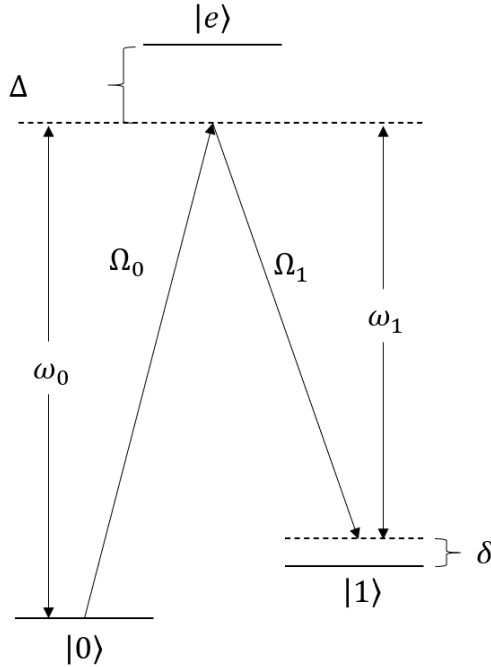


图 5.1 Raman 过程示意图。两束远失谐光场通过虚激发态 $|e\rangle$ 在 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 之间产生有效双光子耦合。

为兼顾一般性与后续实验记号的一致性，允许两束光场对两个基态都存在弱耦合。设主 Raman 通道对应的单光子 Rabi 频率为 Ω_0 与 Ω_1 ，交叉耦合项记为 Ω_{10} 与 Ω_{01} ，则在旋波近似下，三能级系统可写为：

$$H_0 = E_0 |0\rangle\langle 0| + E_1 |1\rangle\langle 1| + E_e |e\rangle\langle e|, \quad (5.10)$$

$$H' = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} (\Omega_0 e^{-i(\omega_0 t - \phi_0)} + \Omega_{10} e^{-i(\omega_1 t - \phi_1)}) |e\rangle\langle 0| \\ + (\Omega_{01} e^{-i(\omega_0 t - \phi_0)} + \Omega_1 e^{-i(\omega_1 t - \phi_1)}) |e\rangle\langle 1| \\ + \text{h.c.} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

其中 $\phi_j \equiv \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \varphi_j$ 包含了光场相位与传播相位。定义

$$\omega_{01} \equiv \frac{E_1 - E_0}{\hbar}, \quad \Delta \equiv \omega_0 - \frac{E_e - E_0}{\hbar}, \quad \delta \equiv \omega_0 - \omega_1 - \omega_{01},$$

并在相互作用表象中令 $|\psi(t)\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_e |e\rangle$ 、 $\tilde{c}_e \equiv e^{i\Delta t} c_e$ ，则慢变量满足：

$$\begin{aligned} \dot{c}_0 &= \frac{i}{2} \left(\Omega_0 e^{i\phi_0} + \Omega_{10} e^{-i(\omega_{01} + \delta)t + i\phi_1} \right) \tilde{c}_e, \\ \dot{c}_1 &= \frac{i}{2} \left(\Omega_{01} e^{+i\omega_{01}t + i\phi_0} + \Omega_1 e^{-i\delta t + i\phi_1} \right) \tilde{c}_e, \\ \dot{\tilde{c}}_e - i\Delta \tilde{c}_e &= \frac{i}{2} \left[\left(\Omega_0 e^{-i\phi_0} + \Omega_{10} e^{+i(\omega_{01} + \delta)t - i\phi_1} \right) c_0 + \left(\Omega_{01} e^{-i\omega_{01}t - i\phi_0} + \Omega_1 e^{+i\delta t - i\phi_1} \right) c_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

当满足大失谐条件 $|\Delta| \gg |\Omega_0|, |\Omega_1|, |\Omega_{10}|, |\Omega_{01}|, |\delta|$ 时，激发态幅度可绝热消除，得到：

$$\tilde{c}_e \simeq -\frac{1}{2\Delta} \left[\left(\Omega_0 e^{-i\phi_0} + \Omega_{10} e^{+i(\omega_{01} + \delta)t - i\phi_1} \right) c_0 + \left(\Omega_{01} e^{-i\omega_{01}t - i\phi_0} + \Omega_1 e^{+i\delta t - i\phi_1} \right) c_1 \right]. \quad (5.13)$$

将式 (5.13) 代回，并进一步忽略含 $\pm\omega_{01}$ 的快速振荡项，可得基态子空间中的有效哈密顿量：

$$H_{\text{eff}} \simeq \frac{\hbar}{4\Delta} \begin{pmatrix} \Omega_0^2 + \Omega_{10}^2 & \Omega_0 \Omega_1 e^{i(\delta t + \phi_R)} \\ \Omega_0 \Omega_1 e^{-i(\delta t + \phi_R)} & \Omega_1^2 + \Omega_{01}^2 \end{pmatrix}, \quad \phi_R \equiv \phi_0 - \phi_1. \quad (5.14)$$

其中对角项给出 AC Stark shift，非对角项给出 Raman 有效耦合。再将对角项吸收到参考哈密顿量中，可把系统写成标准的二能级驱动形式：

$$H_{I,\text{eff}} = \frac{\hbar \Omega_R}{2} \left(e^{i(\mu t + \phi_R)} |0\rangle\langle 1| + \text{h.c.} \right), \quad \Omega_R \equiv \frac{\Omega_0 \Omega_1}{2\Delta}, \quad \mu \equiv \delta - \delta_{\text{shift}}, \quad (5.15)$$

其中：

$$\delta_{\text{shift}} = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_{01}^2 - \Omega_0^2 - \Omega_{10}^2}{4\Delta}, \quad (5.16)$$

为 differential AC Stark shift^[96,99]。式 (5.15) 表明：在远失谐条件下，双光子 Raman 过程可以严格映射为一个等效二能级 Rabi 驱动，其有效 Rabi 频率由两束光的单光子耦合强度之积决定^[18,99]。于是通过设定 Raman 光的强度、相位和作用时间，即可实现单比特门操作。这一结论也表明，寻址光路中任何影响 Ω_0 、 Ω_1 或 Δ 的不稳定因素，都将直接转化为操作保真度损失，因此在面向量子线路的长时间运行中，光强与频率的稳定性控制尤为关键。

拉曼散射与远失谐标度。尽管式 (5.15) 中已经消除了激发态自由度，但自发散射仍是 Raman 门的基本误差来源之一，它既可能通过 Rayleigh 散射引入退相干，也可能通过 Raman 散射导致比特翻转或泄漏^[96]。由式 (5.13) 可见，激发态瞬时占据随 $1/\Delta^2$ 衰减，因此在固定两光子门速率下，散射概率具有近似标度：

$$P_{\text{sc}} \sim \Gamma t_g \frac{\Omega_R}{\Delta}, \quad (5.17)$$

其中 Γ 为激发态自然线宽, t_g 为门时间。对本文采用的 532 nm 超远失谐 Raman 系统而言, 该项通常不再是单、双比特门误差预算中的主导贡献; 因此后文误差预算只保留其物理背景说明, 而不再将其作为主导项展开讨论^[96]。

上述三能级推导保留了 Raman 过程的核心物理图像, 但尚未纳入 $^{171}\text{Yb}^+$ 真实的多激发态结构、Raman 光场的多频成分以及偏振自由度。对于实验配置设计而言, 这些效应会直接修正等效 Raman Rabi 频率与 differential AC Stark shift 的参数依赖, 例如常用的 lin⊥lin 偏振配置可以在保持较大有效耦合的同时抑制差分光移, 而进一步调节偏振椭圆度或几何关系还可实现接近 magic polarization 的工作点。相关理论推导在文献^[100-101]中已有详细讨论; 考虑到本文后续实验已按优化建议选取工作点, 且这些修正不改变后文其他环节的理论结构, 这里仅补充与实验参数依赖直接相关的核心结果。

推广到多激发态与偏振自由度情形。 真实原子中, Raman 过程通常由多个虚中间态共同介导。以 $^{171}\text{Yb}^+$ 为例, 主要贡献来自 $^2\text{P}_{1/2}$ 与 $^2\text{P}_{3/2}$ 两个精细结构支路; 当单光子失谐远大于激发态占据所对应的线宽与有效耦合强度, 因而仍可对激发态作绝热消除时, 有效 Raman 耦合应对所有虚中间态的振幅作相干求和, 而各基态的 AC Stark shift 则对各单光子耦合作求和。记两束 Raman 光场为 $j \in \{a, b\}$, 量子比特基态为 $g \in \{0, 1\}$, 虚激发态为 $|e\rangle$, 并定义:

$$\Omega_{j,e}^{(g)} \equiv \frac{E_j}{\hbar} \langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j | g \rangle, \quad (5.18)$$

则多能级情形下的有效 Raman Rabi 频率与差分光移可写为:

$$\Omega_{\text{Raman}} = \sum_e \frac{\Omega_{a,e}^{(0)*} \Omega_{b,e}^{(1)}}{2\Delta_e} e^{i(\phi_a - \phi_b)}, \quad (5.19)$$

$$\delta_g = \sum_{j \in \{a,b\}} \sum_e \frac{|\Omega_{j,e}^{(g)}|^2}{4\Delta_{j,e}}, \quad g \in \{0, 1\}, \quad (5.20)$$

$$\delta_{\text{shift}} = \delta_1 - \delta_0. \quad (5.21)$$

其中 $\Delta_{j,e}$ 表示光场 j 相对跃迁 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 的单光子失谐; 当量子比特超精细分裂和激发态超精细分裂相对单光子失谐都足够小时, 可近似取 $\Delta_{j,e} \simeq \Delta_e$ 。式 (5.19) – (5.21) 表明, 偏振选择通过偶极矩阵元与 Clebsch–Gordan 系数直接进入有效耦合: 不同精细结构支路之间的相干干涉决定 Ω_{Raman} 的大小, 而两束光对两个基态产生的单光子光移之差共同决定差分 AC Stark shift。因此, 实验中常通过偏振工程在 Raman 耦合强度和残余光移之间做优化选择^[96,100]。

多频 Raman 情形下的四阶 AC Stark shift。 对于本文采用的 MZM Raman 系统, 输出光场往往包含多个离散频率分量; 任意两分量之间都可能形成拍频并驱动一个两光子跃迁通道。当某个拍频靠近 ω_{01} (或进一步靠近边带频率 $\omega_{01} \pm \omega_m$) 时, 它给出期望的 Raman 驱动; 其余远离共振的拍频虽然不会有效翻转自旋, 却会通过

离共振两光子耦合对量子比特产生附加光移。由于这些附加项本身已经是二光子过程，对应能级修正在光场幅度上呈四阶标度，因此常称为四阶 AC Stark shift^[45]。

将多频 Raman 过程视为等效二能级驱动，其在以 ω_{01} 为基准的旋转系中可写为：

$$\tilde{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \sum_{\ell} \left(\Omega_{\ell} e^{-i(\delta_{\ell} t - \varphi_{\ell})} \sigma_{+} + \text{h.c.} \right), \quad \delta_{\ell} \equiv \omega_{\ell} - \omega_{01}, \quad (5.22)$$

其中 ω_{ℓ} 为第 ℓ 个拍频， Ω_{ℓ} 为相应的双光子 Rabi 频率。若其中只有一项近共振，而其余拍频均满足 $|\delta_{\ell}| \gg |\Omega_{\ell}|$ ，则可将离共振项作微扰消除，得到每个离共振通道贡献的有效光移哈密顿量：

$$H_{\text{LS},\ell}^{(4)} \simeq \frac{\hbar |\Omega_{\ell}|^2}{4\delta_{\ell}} \sigma_z, \quad (5.23)$$

对应的量子比特跃迁频率附加偏移为：

$$\delta_{\text{LS},\ell}^{(4)} \simeq \frac{|\Omega_{\ell}|^2}{2\delta_{\ell}}. \quad (5.24)$$

因此，总的四阶差分光移可写为：

$$\delta_{\text{LS}}^{(4)} \simeq \sum_{\ell \neq 0} \frac{|\Omega_{\ell}|^2}{2\delta_{\ell}}, \quad (5.25)$$

其中 $\ell = 0$ 表示被选作目标 Raman 驱动的近共振拍频。式 (5.25) 表明，四阶光移不仅取决于离共振拍频的幅度，也取决于它们相对于比特跃迁频率的符号和偏离量；因此它会随 MZM 工作点、边带抑制制度、AOM 频移设定以及光强漂移而变化。在高保真实验中，这一项通常需要通过独立标定并入两光子失谐补偿之中。

5.1.3 声子外态与自旋内态的耦合

以上推导仅涉及自旋内态空间。然而如第 2 章与第 3 章所述，囚禁离子还具有运动外态自由度；在冷却后，离子的运动态可以用简谐振子模型描述^[18,57]。以下先以单个选定振动模说明内外态耦合的基本机理，并给出后续边带谱测量与两比特 MS 门最常用的解析表达；多模推广及其在线路中的处理将在第 5.3.4 节讨论。

对于声子外态空间，考虑质量为 M 的离子在一维简谐势中（对应某一振动模）运动，模式频率 ν ，声子产生/湮灭算符为：

$$a \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|, \quad a^{\dagger} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|, \quad (5.26)$$

其中 $|n\rangle$ 是声子数为 n 的本征 Fock 态。

对于自旋内态空间，升降算符和 Pauli 算符为：

$$\sigma_{+} \equiv |1\rangle \langle 0|, \quad \sigma_{-} \equiv |0\rangle \langle 1|, \quad \sigma_x = \sigma_{+} + \sigma_{-}, \quad \sigma_y = -i(\sigma_{+} - \sigma_{-}), \quad \sigma_z = |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0|. \quad (5.27)$$

同时，对位置算符做如下变换：

$$x = x_0(a + a^\dagger), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu}}. \quad (5.28)$$

基于式 (5.15) 进行改写，加入声子相关项。注意到

$$\phi_R = \phi_0 - \phi_1 = (\vec{k}_0 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \varphi_0 - \varphi_1 = \eta(a + a^\dagger) + \varphi_0 - \varphi_1,$$

其中

$$\eta = \Delta k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}},$$

为 Lamb-Dicke 系数，可得

$$H_{\text{eff}} = \sum_k \hbar\nu(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) + \hbar\frac{\Omega}{2} \left(\sigma_+ e^{\sum_k i\eta(a_k + a_k^\dagger)} e^{-i\mu t + i\phi} + h.c. \right),$$

其中相位 $\phi = \varphi_0 - \varphi_1$ 为构成 Raman 过程的两束激光的相位差。

对声子空间以 $H_0 = \hbar\nu(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ 变换到相互作用表象：

$$H_{\text{I,eff}} = \hbar\frac{\Omega}{2} \left(\sigma_+ e^{i\eta(ae^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t})} e^{-i\mu t + i\phi} + h.c. \right). \quad (5.29)$$

一般在离子被冷却后，Lamb-Dicke 极限条件得到满足： $\eta \ll 1$ 下，通过 $e^{i\eta(ae^{-i\omega_m t} + a^\dagger e^{i\omega_m t})} \simeq 1 + i\eta (ae^{-i\omega_m t} + a^\dagger e^{i\omega_m t}) + \mathcal{O}(\eta^2)$ ，可将式 (5.29) 简化为：

$$H = \hbar\frac{\Omega}{2} (\sigma_+ e^{-i\mu t + i\phi} + i\eta\sigma_+ ae^{-i(\mu+\nu)t + i\phi} + i\eta\sigma_+ a^\dagger e^{-i(\mu-\nu)t + i\phi} + h.c.). \quad (5.30)$$

至此，我们得到了包含声子外态与自旋内态空间的完整有效哈密顿量。Raman 过程对离子内外态空间的同时耦合，一方面使动力学变得更为复杂，另一方面为离子操控提供了丰富手段。红蓝边带跃迁、边带冷却、声子谱测量以及两比特门等关键技术均基于此发展而来。对于高保真度寻址量子门线路而言，理解并精确控制这一耦合是抑制运动相关误差、实现门级到线路级性能转化的理论前提^[18,99]。

5.1.4 内外态耦合影响下的态演化方程

本节从哈密顿量在声子 Fock 态基底上的矩阵元出发，分析 Raman 过程对外态空间的作用（如声子数的增减），以及运动态占据对内态演化的反馈影响。式 (5.29) 中的运动态因子本质上是位移算符 $e^{i\eta(a+a^\dagger)}$ ，其在 Fock 态基底上的一般矩阵元为：

$$M_{n,\Delta n} \equiv \langle n + \Delta n | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle = e^{-\eta^2/2} (i\eta)^{|\Delta n|} \sqrt{\frac{n_<!}{n_>!}} L_{n_<}^{|\Delta n|}(\eta^2), \quad (5.31)$$

其中 $\Delta n \in \mathbb{Z}$ ， $n_< \equiv \min(n, n + \Delta n)$ ， $n_> \equiv \max(n, n + \Delta n)$ ， $L_n^\alpha(x)$ 为缔合 Laguerre 多项式^[18,99]。对给定 Δn 的共振驱动（ $\delta \simeq \Delta n \nu$ ），耦合将闭合在二维子空间 $\{|0, n\rangle, |1, n + \Delta n\rangle\}$ 内，对应的有效 Rabi 系数可写为：

$$\Omega_n^{(\Delta n)} = \Omega M_{n,\Delta n}, \quad |\Omega_n^{(\Delta n)}| = \Omega |M_{n,\Delta n}|. \quad (5.32)$$

特别地，载波 ($\Delta n = 0$) 与一阶边带 ($\Delta n = \pm 1$) 分别为：

$$\Omega_n^{(c)} \equiv \Omega_n^{(0)} = \Omega e^{-\eta^2/2} L_n(\eta^2) \simeq \Omega \left[1 - \eta^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\eta^4) \right], \quad (5.33)$$

$$\Omega_n^{(\text{rsb})} \equiv \Omega_n^{(-1)} = \Omega e^{-\eta^2/2} (i\eta) \sqrt{n} L_{n-1}^1(\eta^2), \quad (n \geq 1),$$

$$|\Omega_n^{(\text{rsb})}| \simeq \Omega \eta \sqrt{n}, \quad (\eta \ll 1), \quad (5.34)$$

$$\Omega_n^{(\text{bsb})} \equiv \Omega_n^{(+1)} = \Omega e^{-\eta^2/2} (i\eta) \sqrt{n+1} L_n^1(\eta^2), \quad (n \geq 0),$$

$$|\Omega_n^{(\text{bsb})}| \simeq \Omega \eta \sqrt{n+1}, \quad (\eta \ll 1). \quad (5.35)$$

式 (5.33) – (5.35) 给出了运动态对载波与边带 Rabi 的 n 依赖修正；其中 $e^{-\eta^2/2}$ 是 Debye–Waller 抑制因子，而 Laguerre 多项式给出更高阶的 η 修正^[99]。

接下来分别考虑离子处于声子本征态 $|n\rangle$ 和热态 ρ_{th} （内态初态均假定为 $|0\rangle$ ）时，三种特殊情形下（通过调节激光失谐实现）的态演化运动方程：

(1) 离子处于声子本征态 $|n\rangle$

(a) 载波跃迁 ($\mu = 0$)：在子空间 $\{|0, n\rangle, |1, n\rangle\}$ 上，等效哈密顿量为：

$$H_c^{(n)} = \frac{\hbar}{2} \left(\Omega_n^{(c)} e^{i\phi} |1, n\rangle \langle 0, n| + \Omega_n^{(c)*} e^{-i\phi} |0, n\rangle \langle 1, n| \right). \quad (5.36)$$

令态矢写为 $|\psi(t)\rangle = c_{0,n}(t) |0, n\rangle + c_{1,n}(t) |1, n\rangle$ ，则薛定谔方程给出振幅的运动方程：

$$i\dot{c}_{0,n} = \frac{\Omega_n^{(c)*}}{2} e^{-i\phi} c_{1,n}, \quad i\dot{c}_{1,n} = \frac{\Omega_n^{(c)}}{2} e^{+i\phi} c_{0,n}. \quad (5.37)$$

若内态初态为 $|0\rangle$ （即 $c_{0,n}(0) = 1, c_{1,n}(0) = 0$ ），则解析解为：

$$c_{0,n}(t) = \cos \frac{|\Omega_n^{(c)}|t}{2}, \quad c_{1,n}(t) = -i e^{i(\phi + \arg \Omega_n^{(c)})} \sin \frac{|\Omega_n^{(c)}|t}{2}, \quad (5.38)$$

即：

$$|\psi(t)\rangle = \cos \frac{|\Omega_n^{(c)}|t}{2} |0, n\rangle - i e^{i(\phi + \arg \Omega_n^{(c)})} \sin \frac{|\Omega_n^{(c)}|t}{2} |1, n\rangle. \quad (5.39)$$

(b) 红边带跃迁 ($\mu = -\nu$)：红边带将 $|0, n\rangle \leftrightarrow |1, n-1\rangle$ ($n \geq 1$)。在子空间 $\{|0, n\rangle, |1, n-1\rangle\}$ 上：

$$H_{\text{rsb}}^{(n)} = \frac{\hbar}{2} \left(\Omega_n^{(\text{rsb})} e^{i\phi} |1, n-1\rangle \langle 0, n| + \Omega_n^{(\text{rsb})*} e^{-i\phi} |0, n\rangle \langle 1, n-1| \right), \quad (5.40)$$

令 $|\psi(t)\rangle = c_{0,n}(t) |0, n\rangle + c_{1,n-1}(t) |1, n-1\rangle$ ，则

$$i\dot{c}_{0,n} = \frac{\Omega_n^{(\text{rsb})*}}{2} e^{-i\phi} c_{1,n-1}, \quad i\dot{c}_{1,n-1} = \frac{\Omega_n^{(\text{rsb})}}{2} e^{+i\phi} c_{0,n}. \quad (5.41)$$

在初态 $c_{0,n}(0) = 1, c_{1,n-1}(0) = 0$ 下，解为：

$$|\psi(t)\rangle = \cos \frac{|\Omega_n^{(\text{rsb})}|t}{2} |0, n\rangle - i e^{i(\phi + \arg \Omega_n^{(\text{rsb})})} \sin \frac{|\Omega_n^{(\text{rsb})}|t}{2} |1, n-1\rangle. \quad (5.42)$$

特别地，若 $n = 0$ 则红边带无耦合 ($\Omega_0^{(\text{rsb})} = 0$)。

(c) 蓝边带跃迁 ($\mu = +\nu$): 蓝边带将 $|0, n\rangle \leftrightarrow |1, n+1\rangle$ ($n \geq 0$)。在子空间 $\{|0, n\rangle, |1, n+1\rangle\}$ 上:

$$H_{\text{bsb}}^{(n)} = \frac{\hbar}{2} \left(\Omega_n^{(\text{bsb})} e^{i\phi} |1, n+1\rangle \langle 0, n| + \Omega_n^{(\text{bsb})*} e^{-i\phi} |0, n\rangle \langle 1, n+1| \right), \quad (5.43)$$

令 $|\psi(t)\rangle = c_{0,n}(t) |0, n\rangle + c_{1,n+1}(t) |1, n+1\rangle$, 则:

$$i\dot{c}_{0,n} = \frac{\Omega_n^{(\text{bsb})*}}{2} e^{-i\phi} c_{1,n+1}, \quad i\dot{c}_{1,n+1} = \frac{\Omega_n^{(\text{bsb})}}{2} e^{+i\phi} c_{0,n}. \quad (5.44)$$

在初态 $c_{0,n}(0) = 1, c_{1,n+1}(0) = 0$ 下, 解为:

$$|\psi(t)\rangle = \cos \frac{|\Omega_n^{(\text{bsb})}|t}{2} |0, n\rangle - i e^{i(\phi + \arg \Omega_n^{(\text{bsb})})} \sin \frac{|\Omega_n^{(\text{bsb})}|t}{2} |1, n+1\rangle. \quad (5.45)$$

(2) 离子处于热态 ρ_{th}

若该运动模处于热平衡态:

$$\rho_{\text{th}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle \langle n|, \quad p_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}, \quad (5.46)$$

并且内态初态为 $|0\rangle$, 则总初态为 $\rho(0) = |0\rangle \langle 0| \otimes \rho_{\text{th}}$ 。由于载波/边带驱动对不同 n 分量具有不同的有效 Rabi (式 (5.33) – (5.35)), 热态下的内态动力学一般表现为对 n 的非相干平均。

(a) 载波跃迁 ($\mu = 0$): 对每个 n , 载波激发概率为 $\sin^2(|\Omega_n^{(c)}|t/2)$, 因此热态平均得到:

$$P_1^{(c)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin^2 \left(\frac{|\Omega_n^{(c)}|t}{2} \right). \quad (5.47)$$

若仅关心“等效耦合强度”的抑制 (例如小 η 、小温度或短时间近似), 一个常用的 Debye–Waller 形式是取矩阵元的热平均:

$$\overline{M_c} \equiv \text{Tr} \left[\rho_{\text{th}} e^{i\eta(a+a^\dagger)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-\eta^2/2} L_n(\eta^2) = \exp \left[-\eta^2 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.48)$$

从而可定义近似“等效载波 Rabi”:

$$\Omega_{\text{c,eff}} \approx \Omega \exp \left[-\eta^2 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (5.49)$$

需要强调的是: 式 (5.49) 描述的是耦合强度的平均抑制, 而完整动力学仍由式 (5.47) 的多频率叠加给出。

(b) 红/蓝边带跃迁 ($\mu = -/+ \nu$): 红边带与蓝边带的热态平均激发概率分别为:

$$P_1^{(\text{rsb})}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin^2 \left(\frac{|\Omega_n^{(\text{rsb})}|t}{2} \right), \quad (5.50)$$

$$P_1^{(\text{bsb})}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin^2 \left(\frac{|\Omega_n^{(\text{bsb})}|t}{2} \right). \quad (5.51)$$

由于边带耦合系数 $|\Omega_n^{(\text{rsb})}|$ 与 $|\Omega_n^{(\text{bsb})}|$ 分别随 $\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n+1}$ 变化, 热态下边带 Rabi 振荡通常会出现更明显的退相干。在弱激发/短时间极限 $\sin^2(x) \simeq x^2$ 下:

$$P_1(t) \simeq \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{4} t^2, \quad \Omega_{\text{eff}}^2 \equiv \sum_n p_n |\Omega_n^{(\Delta n)}|^2. \quad (5.52)$$

在 Lamb-Dicke 近似 $|\Omega_n^{(\text{rsb})}| \simeq \Omega\eta\sqrt{n}$ 、 $|\Omega_n^{(\text{bsb})}| \simeq \Omega\eta\sqrt{n+1}$ 下, 利用热态分布的特点: $\langle n \rangle = \bar{n}$, 可得简洁结果:

$$\Omega_{\text{rsb,eff}} \simeq \Omega\eta\sqrt{\bar{n}}, \quad \Omega_{\text{bsb,eff}} \simeq \Omega\eta\sqrt{\bar{n}+1}. \quad (5.53)$$

根据式 (5.52) - (5.53), 可得红/蓝边带激发概率之比满足:

$$P_{\text{rsb}}/P_{\text{bsb}} \approx \bar{n}/(\bar{n}+1). \quad (5.54)$$

因此, 通过分别激发红蓝边带并读取实验结果, 可以借助上式进行平均声子数 $\bar{n}$ 的估计以及离子外态加热率测量。这一标定手段在后续门参数优化和运行时声子监测中起到基础性作用^[18]。

5.2 Mølmer-Sørensen (MS) 纠缠门

MS 门是一类基于自旋依赖力 (spin-dependent force) 的几何相位门, 其核心思想是在相空间中让不同自旋本征态对应的运动波包沿不同轨迹演化并闭合, 由轨迹包围面积获得只作用于自旋的几何相位, 从而实现等效的 Ising 型两体相互作用^[18,20]。作为离子阱量子计算中最常用的原生两比特纠缠门, MS 门的保真度直接决定了量子线路的可执行深度, 也是衡量系统能否满足量子纠错阈值要求的关键指标之一。

5.2.1 MS 门实现原理

本文实现 MS 门的激光配置如图 5.2 所示: 在两个离子上施加相同的 3 束光, 第 i 束光的频率为 ω_i 、相位为 φ_i , 每束激光均可通过 AOM/AOD 调节频率、幅度和相位。

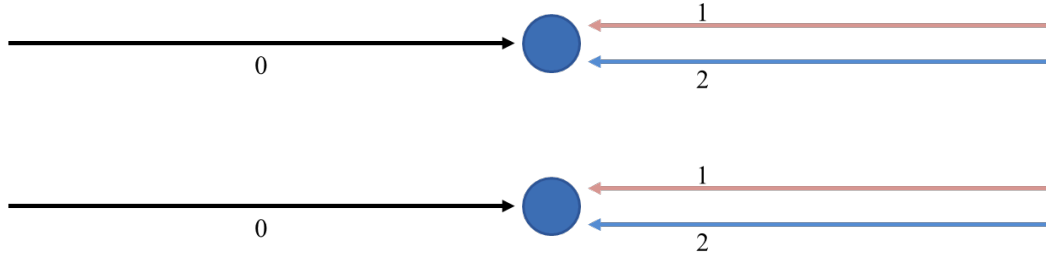


图 5.2 MS 门激光配置。图中给出了实现红、蓝边带双音驱动所需的三束 Raman 光频率关系; 后续所有门幅度、频率与相位调制均通过对应 AOM/AOD 射频信号实现。

基于式 (5.30)，先考虑单个离子上的哈密顿量。为方便后续讨论，将相位项改写为实验器件参数：

$$\varphi_0 = \varphi_l + \varphi_{\text{AOM L}} + \varphi_{\text{AOD L}} + \varphi_{\lambda \text{ L}}, \quad (5.55)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_l + \varphi_{\text{AOM R}} + \varphi_{\text{AOD R}} + \varphi_{\lambda \text{ R}},$$

其中 φ_l 为激光相位， $\varphi_{\text{AOM(AOD) L(R)}}$ 为左侧（右侧）AOM（AOD）引入的相位， $\varphi_{\lambda \text{ L(R)}}$ 为左侧（右侧）光路光程引入的相位。

光 0 与 1 以及光 0 与 2 构成两组 Raman 过程，频率满足：

$$\omega_0 - \omega_1 = \omega_{hf} + \nu - \delta,$$

$$\omega_0 - \omega_2 = \omega_{hf} - (\nu - \delta).$$

在旋波近似下忽略含 $e^{i\nu t}$ 及更高频率的项后，哈密顿量为：

$$H = H_r + H_b,$$

$$H_r = \frac{i\eta\Omega_r\hbar}{2}(\sigma_+ a e^{-i\delta t + i\phi_r} - \sigma_- a^\dagger e^{i\delta t - i\phi_r}),$$

$$H_b = \frac{i\eta\Omega_b\hbar}{2}(\sigma_+ a^\dagger e^{i\delta t + i\phi_b} - \sigma_- a e^{-i\delta t - i\phi_b}),$$

其中 $\phi_r = \varphi_0 - \varphi_1$, $\phi_b = \varphi_0 - \varphi_2$ 。MS 门要求 $\Omega_r = \Omega_b = \Omega_0$ ，此时哈密顿量为：

$$H = H_r + H_b = \frac{i\eta\Omega_0\hbar}{2}(\sigma_+ e^{i\phi_s} - \sigma_- e^{-i\phi_s})(a e^{-i\delta t} e^{i\phi_m} + a^\dagger e^{i\delta t} e^{-i\phi_m}),$$

其中 $\phi_s = \frac{\phi_r + \phi_b}{2} = \varphi_0 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\phi_m = \frac{\phi_r - \phi_b}{2} = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$ 。为方便后文与实验相位约定保持一致，本文将 MS 门的自旋相位轴定义为 σ_x 方向，即：

$$i(\sigma_+ e^{i\phi_s} - \sigma_- e^{-i\phi_s}) = \sigma_x. \quad (5.56)$$

此时哈密顿量化为：

$$H = \frac{\eta\Omega_0\hbar}{2}\sigma_x(a e^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}).$$

该作用被称为自旋依赖力（spin-dependent force, SDF）^[18,95]。其中位移算符项 $a e^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}$ 对应运动空间中的驱动力（因为 $\hat{x} \propto a + a^\dagger$ ），而 σ_x 因子使得对 σ_x 的两个本征态，该力的方向相反，从而在相空间中产生自旋依赖的轨迹分离。

实现两比特门需要将激光同时照射在两个离子上，哈密顿量为：

$$H_{MS} = \frac{\hbar}{2}(\eta_1\Omega_1\sigma_{x1} + \eta_2\Omega_2\sigma_{x2})(a e^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}). \quad (5.57)$$

使用 Magnus 展开计算对应的么正演化^[95,97]。在无调制情况下， $\Omega_{1(2)}$ 及 δ 均不含

时。

$$\begin{aligned}
 O_1 &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t_1) dt_1 \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{\hbar}{2} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2}) (ae^{-i\delta t_1} + a^\dagger e^{i\delta t_1}) dt_1 \\
 &= -\frac{i}{2} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2}) \left(\frac{e^{-i\delta t} - 1}{-i\delta} a + \frac{e^{i\delta t} - 1}{i\delta} a^\dagger \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2}) \left(\frac{1 - e^{i\delta t}}{\delta} a^\dagger - \frac{1 - e^{-i\delta t}}{\delta} a \right).
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
 O_2 &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [H(t_1), H(t_2)] \\
 &= -\frac{1}{4} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2})^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [ae^{-i\delta t_1} + a^\dagger e^{i\delta t_1}, ae^{-i\delta t_2} + a^\dagger e^{i\delta t_2}] \\
 &= -\frac{1}{4} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2})^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-i\delta(t_1-t_2)} - e^{i\delta(t_1-t_2)} \\
 &= \frac{i}{4} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2})^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sin(\delta t_1 - \delta t_2) \\
 &= \frac{i}{4} (\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2})^2 \int_0^t dt_1 \frac{1 - \cos \delta t_1}{\delta} \\
 &= i \left(\frac{\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2}}{2\delta} \right)^2 (\delta t - \sin \delta t).
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

由对易关系可知, O_3 及更高阶均为零。因此:

$$U_{MS} = \exp\{[\hat{S}_x (\alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a) + i\hat{S}_x^2 \Phi(t)]\},$$

其中,

$$\hat{S}_x = \sigma_{x1} + \frac{\eta_2 \Omega_2}{\eta_1 \Omega_1} \sigma_{x2}, \quad \alpha(t) = \frac{\eta_1 \Omega_1}{2} \frac{1 - e^{i\delta t}}{\delta}, \quad \Phi(t) = \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{2\delta} \right)^2 (\delta t - \sin(\delta t)). \tag{5.60}$$

MS 门需要同时满足两个条件: (i) 相空间闭合, 即要求门结束时 $\alpha(t) = 0$, 否则自旋与运动之间的残余纠缠将导致退相干; (ii) 几何相位积累匹配, 即选择 $\Phi(\tau)$ 使得 $\exp[i\Phi(\tau)\hat{S}_x^2]$ 在自旋子空间产生目标两体纠缠。对本文采用的 σ_x 轴定义, 该条件可写为:

$$\hat{S}_x^2 \Phi(\tau) = \frac{\pi}{4} \sigma_{x1} \sigma_{x2} + \Phi_0, \tag{5.61}$$

忽略全局相位 $e^{i\Phi_0}$ 后, 可得:

$$U_{MS} = \exp\left(i\frac{\pi}{4} \sigma_{x1} \sigma_{x2}\right). \tag{5.62}$$

在本文采用的相位零点约定下, 该操作可将初态 $|00\rangle$ 制备到目标 Bell 态

$$|\Phi_{\pi/2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + i|11\rangle), \tag{5.63}$$

后文涉及 MS 门保真度时，均以这一相位约定为默认目标态；若实验中重新定义相位零点，只需相应替换目标态中的相位参数。

相空间闭合条件 $\alpha(t) = 0$ 可以通过设置门时间满足：

$$\delta t = 2K\pi, \quad (5.64)$$

其中 K 为正整数，此时：

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^2 \Phi &= \left(\frac{\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1} + \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2}}{2\delta} \right)^2 2K\pi \\ &= \frac{(\eta_1 \Omega_1 \sigma_{x1})^2 + (\eta_2 \Omega_2 \sigma_{x2})^2 + 2\eta_1 \Omega_1 \eta_2 \Omega_2 \sigma_{x1} \sigma_{x2}}{2\delta^2} K\pi \\ &= \frac{\eta_1 \eta_2 \Omega_1 \Omega_2}{\delta^2} K\pi \sigma_{x1} \sigma_{x2} + \frac{\eta_1^2 \Omega_1^2 + \eta_2^2 \Omega_2^2}{2\delta^2} K\pi. \end{aligned} \quad (5.65)$$

因此，式 (5.61) 要求：

$$\delta = 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 \Omega_1 \Omega_2 K}. \quad (5.66)$$

为方便计算，后文中相关计算均取 $K = 1$ 。实验上，通常先选定失谐大小，由式 (5.64) 获知门时间后，再扫描激光光强以满足式 (5.66) 从而完成门参数条件数匹配。

5.2.2 MS 门保真度计算方法

实验上，为便于表征两比特 MS 门的保真度，通常测量两类量^[18,97]：

- 计算基中的布居： $P_{ij} = \langle ij | \rho | ij \rangle$ ，尤其是偶宇称子空间布居 $P_{00} + P_{11}$ ；
- 对态施加同相的 $\pi/2$ 分析脉冲（analysis pulse），并扫描其相位 ϕ 后测得的宇称振荡（parity oscillation）二倍频分量振幅 C 。

本文将 parity oscillation 统一拟合为：

$$\Pi(\phi) = \Pi_0 + C \sin(2\phi + \phi_0).$$

或其等价的余弦形式，其中 C 定义为正弦项的振幅；若拟合程序直接返回峰-峰值，则应先除以 2，再代入后续保真度公式。

下面从保真度定义：

$$F_\Phi \equiv \langle \Phi_\theta | \rho | \Phi_\theta \rangle.$$

出发，推导其实验计算公式。

令 ρ 为两比特实验态的密度矩阵（计算基顺序为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ）。目标 Bell 态定义为：

$$|\Phi_\theta\rangle = \frac{|00\rangle + e^{i\theta} |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

于是有：

$$|\Phi_\theta\rangle\langle\Phi_\theta| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + e^{-i\theta}|00\rangle\langle 11| + e^{i\theta}|11\rangle\langle 00|). \quad (5.67)$$

因此保真度可写为：

$$\begin{aligned} F_\Phi &= \frac{1}{2}(\text{Tr}[\rho|00\rangle\langle 00|] + \text{Tr}[\rho|11\rangle\langle 11|] + e^{-i\theta}\text{Tr}[\rho|00\rangle\langle 11|] + e^{i\theta}\text{Tr}[\rho|11\rangle\langle 00|]) \\ &= \frac{P_{00} + P_{11}}{2} + \text{Re}(e^{-i\theta}\rho_{00,11}), \end{aligned} \quad (5.68)$$

其中 $\rho_{00,11} \equiv \langle 00|\rho|11\rangle$ ，且 $\rho_{11,00} = \rho_{00,11}^*$ （由厄米性可知）。

式 (5.68) 表明，要得到 Bell 态保真度，只需两类信息：

1. 计算基中的偶态布居 $P_{00} + P_{11}$ ；
2. 偶态之间相干项 $\rho_{00,11}$ 的某个相位投影 $\text{Re}(e^{-i\theta}\rho_{00,11})$ 。

第一项可直接由荧光判别统计得到；第二项通常通过如下 parity oscillation 过程提取^[18,97]。

定义宇称算符（偶态为 +1，奇态为 -1）：

$$\hat{\Pi} \equiv \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10|. \quad (5.69)$$

因此，若对两比特在计算基上直接测量得到 P_{ij} ，则宇称期望值为：

$$\Pi \equiv \langle \hat{\Pi} \rangle = P_{00} + P_{11} - P_{01} - P_{10}. \quad (5.70)$$

接着，在测量前对两比特同时施加同相 $\pi/2$ 脉冲，并扫描其相位 ϕ ：

$$\begin{aligned} U_A(\phi) &\equiv R(\pi/2, \phi) \otimes R(\pi/2, \phi), \\ R(\pi/2, \phi) &= \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(\sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi)\right]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

对每个 ϕ ，测得旋转后的宇称：

$$\Pi(\phi) = \text{Tr}[U_A(\phi)\rho U_A^\dagger(\phi)\hat{\Pi}]. \quad (5.72)$$

实验上通常将 $\Pi(\phi)$ 对 ϕ 拟合为正弦函数，其振幅（或对比度）记为 C 。

经计算可得：

$$\Pi(\phi) = 2\text{Re}(\rho_{00,11}e^{2i(\phi+\pi/2)}) + 2\text{Re}(\rho_{01,10}). \quad (5.73)$$

式 (5.73) 表明，只要 $\rho_{00,11}$ 非零， $\Pi(\phi)$ 就会随 2ϕ 振荡。对于理想 MS 门， $\rho_{01,10} \approx 0$ ，从而其对比度（振幅）满足：

$$C \approx 2|\rho_{00,11}|. \quad (5.74)$$

将式 (5.74) 代回式 (5.68)，得到：

$$F_\Phi = \frac{P_{00} + P_{11}}{2} + \text{Re}(e^{-i\theta}\rho_{00,11}) \leq \frac{P_{00} + P_{11}}{2} + |\rho_{00,11}| \approx \frac{P_{00} + P_{11} + C}{2}. \quad (5.75)$$

第一个不等式来源于目标态与制备态之间的相位不一致。实验上可在完成相位标定后修正门相位，或重新定义目标态，使二者保持一致；此时有 $\text{Re}(e^{-i\theta} \rho_{00,11}) = |\rho_{00,11}|$ 。将其代回式 (5.68)，即可得到 MS 门保真度的计算公式：

$$F_{\Phi} = \frac{P_{00} + P_{11} + C}{2}. \quad (5.76)$$

5.3 门误差来源理论分析

本节对门保真度的主要限制因素进行系统的理论归因与量级估算。从面向量子纠错的线路执行出发，不仅需要关心单次门操作的平均不保真度，还需要关心误差在多轮量子线路（尤其是重复纠错循环）中的累积方式。相干过旋转、相位漂移与寻址串扰等系统误差若不加抑制，可能在深线路中转化为更强的相关误差通道，因此需要在误差预算与补偿流程中被优先识别与压制^[12,49]。结合前述 Raman 与 MS 门理论，门误差可按物理机制分为三类：

1. **相干误差 (coherent error)**: 由模型近似（如 Lamb-Dicke 近似、旋波近似）、实验参数失配（detuning、门时间、相位/幅度标定误差等）引起。该类误差在理想情况下仍对应么正演化，可从有效 Hamiltonian 出发解析推导其对目标门的偏离。
2. **退相干误差 (decoherent error)**: 包括声子加热、声子相干性衰减、以及 Raman 体系可能带来的自发散射等。对于本文采用的超远失谐 Raman 条件，自发散射项在第 5.1 节已论证可忽略，后续不再作为主导误差来源讨论。
3. **统计与读出相关误差 (statistical & SPAM)**: 实验数据来自有限次数采样，存在量子投影概率带来的统计噪声；同时存在 state preparation and measurement (SPAM) 误差。SPAM 可按第 3 章所述通过逆乘混淆矩阵的方法在数据后处理中抑制。虽然这类噪声并不属于门操作本身的物理极限，但仍会对实验保真度评估产生显著影响。

为避免与后续实验误差预算混淆，以下凡能由前述有效哈密顿量直接得到的结果，将尽量保留显式解析式；凡仅用于误差源排序的项，则明确标注为小误差展开、量级估算或数值拟合系数。在后文估算中，将门保真度写为：

$$F \simeq 1 - \epsilon_{\text{coh}} - \epsilon_{\text{dec}}, \quad (5.77)$$

其中 ϵ_{coh} 与 ϵ_{dec} 分别代表相干与退相干导致的不保真度主导项；类似的误差分析与量级估算可参见高保真两比特门的误差模型工作（及其补充材料）^[102-103]。采样与 SPAM 的影响将在第 5.3.3 节单独讨论。

5.3.1 单比特门误差

平均门保真度与小误差展开 对单比特么正操作而言，平均门保真度可定义为对所有纯态输入的 Haar 平均：

$$F_{\text{avg}}(U, U') = \int d\psi |\langle \psi | U^\dagger U' | \psi \rangle|^2 = \frac{|\text{Tr}(U^\dagger U')|^2 + 2}{6}, \quad (5.78)$$

其中后一等式为单比特情形的标准结果^[104-105]。若将目标操作与实际操作分别参数化为 $U = R(\theta_0, \varphi_0)$ 、 $U' = R(\theta', \varphi')$ ，并定义小偏差：

$$\delta\theta \equiv \theta' - \theta_0, \quad \delta\varphi \equiv \varphi' - \varphi_0,$$

同时记：

$$A \equiv \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi'),$$

则由式 (5.78) 可得：

$$F_{\text{avg}} = \frac{1 + 2A^2}{3}. \quad (5.79)$$

在 $|\delta\theta| \ll 1$ 、 $|\delta\varphi| \ll 1$ 的小误差极限下，将式 (5.79) 展开到二阶可得：

$$F_{\text{avg}} \approx 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{6} - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} (\delta\varphi)^2. \quad (5.80)$$

表明：在固定旋转轴时，脉冲面积误差 ($\delta\theta$) 与相位积累/轴向误差 ($\delta\varphi$) 均以二次形式降低平均保真度。实验上 $\delta\theta$ 主要来自门时间 t 与 Rabi 频率 Ω （光强漂移、指向/束腰变化、失谐误差等）的相对误差； $\delta\varphi$ 则来自相位噪声、相位零点标定误差等。此外，两光子失谐也会引入等效的 σ_z 旋转，从而同样表现为旋转轴偏离。

Raman 单比特门的参数误差映射 将式 (3.31) 代入并沿用式 (5.15) 的符号约定，可将 Raman 单比特门视作

$$H_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{2} (\Omega_{\text{Raman}} \sigma_\varphi + \mu \sigma_z),$$

其中 Ω_{Raman} 为有效两光子 Rabi 频率， μ 为有效两光子失谐（包含 differential AC Stark shift 的残余）。在 $|\mu| \ll \Omega_{\text{Raman}}$ 的小失谐极限下，可把残余失谐视为一个小的旋转轴倾角 $\delta\beta \simeq \delta\mu/\Omega_{\text{Raman}}$ ；令目标脉冲面积 $\theta = \Omega_{\text{Raman}} t$ ，则由式 (5.80) 可得：

$$1 - F_{\text{avg}} \approx \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{\delta\mu}{\Omega_{\text{Raman}}} \right)^2 + \frac{\theta^2}{6} \left(\frac{\delta\Omega_{\text{Raman}}}{\Omega_{\text{Raman}}} + \frac{\delta t}{t} \right)^2, \quad (5.81)$$

其中 $\delta\mu$ 可由 differential AC Stark shift 的漂移（记作 $\delta\delta_{\text{shift}}$ ）主导；而：

$$\frac{\delta\Omega_{\text{Raman}}}{\Omega_{\text{Raman}}} \simeq \frac{\delta\Omega_1}{\Omega_1} + \frac{\delta\Omega_2}{\Omega_2} - \frac{\delta\Delta}{\Delta},$$

反映了 $\Omega_{\text{Raman}} \propto \Omega_1 \Omega_2 / \Delta$ 的标度关系^[96,99]。

声子热涨落导致的 Rabi 频率涨落 由式 (5.49) 可知, 若离子处于平均声子数为 $\bar{n}$ 的热态, 则载波 Rabi 频率对声子数涨落敏感。对热分布 p_n , 其有效 Rabi 频率涨落可用相对标准差表征:

$$\frac{\sigma_{\Omega}}{\Omega_0} \equiv \frac{\sqrt{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2}}{\Omega_0} \simeq \eta^2 \sqrt{\bar{n}(\bar{n} + 1)}, \quad (5.82)$$

其中 η 为相应模式的 Lamb-Dicke 参数。该结果可由载波耦合在 Lamb-Dicke 展开下对热态取统计平均得到, 常见于离子内外态耦合与 Debye-Waller 抑制的讨论中^[18,99]。

5.3.2 两比特 MS 门误差

按如下顺序估算两比特门误差的主导项 (均以单模近似为起点, 便于给出解析标度: 多模与波形整形的影响在第 5.2 节已讨论):

1. 仅由 MS 近似 Hamiltonian 引起的相干误差: 参数失配导致相空间轨迹不闭合与几何相位偏离 $\pi/2$;
2. 参数失配引入的额外 Hamiltonian 项 (例如红/蓝边带不平衡、中心频率失配等);
3. 模型近似 (主要为旋波近似) 导致的高频项误差;
4. 声子空间的热占据、加热与退相干导致的非相干误差。

(1) MS Hamiltonian 项的参数失配误差 设两离子初态为 $|00\rangle$, 声子初态为 $|0\rangle$ (真空态)。在 σ_x 本征基 $|\pm\rangle$ 下, 有 $|00\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle)$ 。对标准 MS 形式 (见第 5.2 节推导), 可将演化写成对不同自旋本征态施加不同的相空间位移与几何相位, 将结果记为:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\Phi_{++}} \frac{1}{2} \left(|++\rangle |\alpha_{++}\rangle + e^{i\Theta} |+-\rangle |\alpha_{+-}\rangle + e^{i\Theta} |-+\rangle |\alpha_{-+}\rangle + |--\rangle |\alpha_{--}\rangle \right), \quad (5.83)$$

其中

$$\Theta \equiv \frac{\eta_1 \eta_2 \Omega_1 \Omega_2}{\delta^2} (\delta t - \sin \delta t), \quad (5.84)$$

$$\alpha_{ab} \equiv \frac{a \eta_1 \Omega_1 + b \eta_2 \Omega_2}{2} \frac{1 - e^{i\delta t}}{\delta}, \quad (a, b \in \{+1, -1\}), \quad (5.85)$$

δ 为门失谐, $\Omega_{1,2}$ 为两离子在该模式上的等效载波 Rabi 频率, $\eta_{1,2}$ 为对应 Lamb-Dicke 参数。理想门满足 $\delta t = 2\pi K$ (相空间闭合) 且 $\Theta = \pi/2$ (最大纠缠), 此时运动与自旋解耦并得到目标 Bell 态^[18,20,95]。

以 $|\Phi\rangle = (|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2}$ 作为目标态, 可得其保真度 (对运动自由度取内积) 为:

$$F_{\Phi} = \left| \frac{1}{4} \left(e^{-|\alpha_{++}|^2/2} + e^{i(\Theta-\pi/2)} e^{-|\alpha_{+-}|^2/2} + e^{i(\Theta-\pi/2)} e^{-|\alpha_{-+}|^2/2} + e^{-|\alpha_{--}|^2/2} \right) \right|^2. \quad (5.86)$$

在 $|\alpha_{ab}| \ll 1$ 且 $\Theta = \pi/2 + \delta\Theta$ 的小误差极限, 并利用对称性 $|\alpha_{++}| = |\alpha_{--}|$ 、 $|\alpha_{+-}| =$

$|\alpha_{-+}|$, 可化为:

$$F_{\Phi} \approx 1 - \frac{|\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{+-}|^2}{2} - \frac{(\delta\Theta)^2}{4}, \quad (5.87)$$

即: 相空间残余位移与纠缠相位误差分别给出主导的二次不保真度^[95,97]。

(i) 相空间不闭合项 在理想闭合条件 $\delta t = 2\pi K$ 附近, $|1 - e^{i\delta t}|^2$ 可由 $(\delta t - 2\pi K)^2$ 展开得到, 从而 (为避免符号混淆, 对失谐量 δ 的小误差项, 用 $d\delta$ 表示):

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{+-}|^2}{2} &= \frac{(\eta_1\Omega_1 + \eta_2\Omega_2)^2 + (\eta_1\Omega_1 - \eta_2\Omega_2)^2}{8\delta^2} |1 - e^{i\delta t}|^2 \\ &\approx \frac{\pi^2 K^2}{4} \left(\frac{\eta_1\Omega_1}{\eta_2\Omega_2} + \frac{\eta_2\Omega_2}{\eta_1\Omega_1} \right) \left(\frac{d\delta}{\delta} + \frac{\delta t}{t} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.88)$$

(ii) 几何相位误差项 同样在 $\delta t = 2\pi K$ 附近并取最大纠缠条件 $\Theta = \pi/2$, 几何相位误差可整理为:

$$\frac{(\delta\Theta)^2}{4} \approx \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\delta\Omega_1}{\Omega_1} + \frac{\delta\Omega_2}{\Omega_2} - 2\frac{d\delta}{\delta} \right)^2, \quad (5.89)$$

其中 $\delta\Omega_{1,2}$ 代表门幅度/光强/指向等引起的有效 Rabi 频率误差。

(iii) 门相位零点标定误差 上述推导默认门的相位定义与目标态 $|\Phi_{\pi/2}\rangle = (|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2}$ 的相位约定一致 (见式 (5.56))。实验上通常以某一参考单比特脉冲定义相位零点; 若零点存在误差 $\delta\phi_s$, 则 MS 门等效作用轴在 xy 平面旋转, 从而使 $|00\rangle \rightarrow (|00\rangle + ie^{i2\delta\phi_s}|11\rangle)/\sqrt{2}$ 。与目标态的保真度为:

$$F_{\Phi} = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\delta\phi_s)] \approx 1 - (\delta\phi_s)^2,$$

该项在存在门相位漂移或跨门序列拼接时会造成较大影响^[97,99]。

(2) 参数失配引入的额外 Hamiltonian 项 以下各式主要保留主导标度, 其中 ϵ_{center} 与后文的 $\epsilon_{\text{carrier}}$ 所使用的数值系数, 均对应本文工作点附近的数值拟合结果, 而非普适解析常数。

(i) 红/蓝边带不平衡 当红、蓝边带驱动不完全平衡 (例如 $\Omega_r \neq \Omega_b$) 时, 自旋依赖力项可写为 (略去与结论无关的相位选择细节)

$$\Omega_r = (1 + r)\Omega_0, \quad \Omega_b = (1 - r)\Omega_0, \quad |r| \ll 1,$$

并导致哈密顿量中出现与 $\hat{S}_y$ 相关的附加项。以两离子情形写为:

$$H = \frac{\hbar}{2} \eta_1 \Omega_1 \hat{S}_x (ae^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}) + \frac{\hbar}{2} \eta_1 r \Omega_1 \hat{S}_y (-iae^{-i\delta t} + ia^\dagger e^{i\delta t}), \quad (5.90)$$

其 Magnus 展开二阶项会引入与 $\hat{S}_z(2a^\dagger a + 1)$ 相关的自旋-声子耦合相位, 从而在热态下表现为 r^2 级别的退相干; 该机制在 MS 门的系统分析中是常见项^[95-97]。保留一阶项, 可写为:

$$\epsilon_{\text{imb}} \sim \left\langle \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)^2 \right\rangle r^2, \quad (5.91)$$

其中 $\hat{n} = a^\dagger a$, 期望值对门开始时的运动态取平均。

(ii) 中心频率失配（等效 $\hat{S}_z$ 项） 若双比特门的中心频率存在误差 δ_{cl} （例如相对量子比特频率的公共失谐），则哈密顿量变为：

$$H = \hbar \frac{\delta_{cl}}{2} \hat{S}_z + \frac{\hbar}{2} \eta_1 \Omega_1 \hat{S}_x (ae^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}), \quad (5.92)$$

其中 $\hat{S}_z = \sigma_{z,1} + \sigma_{z,2}$ 。该项会在门过程中产生额外的非对易效应并诱导残余位移/相位，导致不保真度随 $(\delta_{cl} t_g)^2$ 标度增长；相关讨论可参考^[97,102]。对本文参数区间，本文采用数值模拟（QuTiP 的 `mesolve`）对该项给出经验拟合系数^[106-107]，作为后续误差预算的量级参考：

$$\epsilon_{center} \sim 6(\delta_{cl} t_g)^2, \quad (5.93)$$

(3) 旋波近似相关误差项 在 MS 门推导中，旋波近似会忽略若干快速振荡项（例如载波项以及远失谐边带项）。以下结果主要用于给出这些项在本文实验参数下的量级估算，并为第 6 章的误差排序提供参考。

式（5.59）在旋波近似下忽略了载波项 $\hbar \frac{\Omega_0}{2} \sigma_+ e^{-i\mu t + i\phi_r} + h.c.$ 及 $\hbar \frac{\Omega_0}{2} \sigma_+ e^{i\mu t + i\phi_b} + h.c.$ ，带上该项，MS 哈密顿量变为：

$$H = \frac{\eta_1 \Omega_1 \hbar}{2} \hat{S}_x (ae^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t}) + \Omega_0 \hbar \cos(\mu t - \phi_m) \hat{S}'_y. \quad (5.94)$$

其中 $\hat{S}_x = \sigma_{x1} + \frac{\eta_2 \Omega_2}{\eta_1 \Omega_1} \sigma_{x2}$ ， $\hat{S}'_y = \sigma_{y1} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \sigma_{y2}$ 。

通过 QuTiP 的 `mesolve` 函数进行数值模拟，可近似得到载波项引起的不保真度^[97]：

$$\epsilon_{carrier} \approx 2 \left(\frac{\Omega_1}{\mu} \right)^2. \quad (5.95)$$

式（5.59）中还在旋波近似下忽略了 $e^{-i(2\nu-\delta)t}$ 的项：

$$H'_r = \frac{i\eta\Omega_b\hbar}{2} (\sigma_+ a^\dagger e^{i(2\nu-\delta)t+i\phi_r} - \sigma_- a e^{-i(2\nu-\delta)t-i\phi_r}),$$

$$H'_b = \frac{i\eta\Omega_r\hbar}{2} (\sigma_+ a e^{-i(2\nu-\delta)t+i\phi_b} - \sigma_- a^\dagger e^{i(2\nu-\delta)t-i\phi_b}),$$

保留这两项的 SDF 哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H_{SDF} &= \frac{\eta\Omega_0\hbar}{2} \sigma_x (ae^{-i\delta t} + a^\dagger e^{i\delta t} + ae^{-i(2\nu-\delta)t} + a^\dagger e^{i(2\nu-\delta)t}) \\ &= \frac{\eta\Omega_0\hbar}{2} \sigma_x [ae^{-i\delta t}(1 + e^{-2i\mu t}) + a^\dagger e^{i\delta t}(1 + e^{2i\mu t})]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

对应 MS 哈密顿量为：

$$H_{MS} = \frac{\eta_1 \Omega_1 \hbar}{2} \hat{S}_x [ae^{-i\delta t}(1 + e^{-2i\mu t}) + a^\dagger e^{i\delta t}(1 + e^{2i\mu t})],$$

使用 Magnus 展开计算对应的么正演化:

$$\begin{aligned} O_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt' \\ &= \hat{S}_x [(\alpha(t) + \alpha'(t))a^\dagger - (\alpha(t) + \alpha'(t))^* a]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{\eta_1 \Omega_1}{2} \frac{1-e^{i\delta t}}{\delta}, \alpha' = \frac{\eta_1 \Omega_1}{2} \frac{1-e^{i(\mu+\nu)t}}{\mu+\nu}$$

$$\begin{aligned} O_2(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^{t'} [H(t'), H(t'')] dt'' dt' \\ &= \hat{S}_x^2 \frac{\eta_1^2 \Omega_1^2}{8} \int_0^t \int_0^{t'} \left[ae^{-i\delta t'} (1 + e^{-2i\mu t'}) + a^\dagger e^{i\delta t'} (1 + e^{2i\mu t'}), \right. \\ &\quad \left. ae^{-i\delta t''} (1 + e^{-2i\mu t''}) + a^\dagger e^{i\delta t''} (1 + e^{2i\mu t''}) \right] dt'' dt' \\ &= i\hat{S}_x^2 \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{2\delta} \right)^2 \frac{2\nu}{\mu + \nu} \left(\delta t + \frac{\delta \sin(2\mu t)}{2\mu} - \sin(\delta t) - \frac{\delta \sin[(\mu + \nu)t]}{\mu + \nu} \right). \end{aligned} \quad (5.98)$$

旋波近似项带来了相空间位移:

$$\alpha'_{\pm\pm} = \frac{\eta_1 \Omega_1 \pm \eta_2 \Omega_2}{2} \frac{1 - e^{i(\mu+\nu)t}}{\mu + \nu},$$

以及旋转角度误差:

$$\frac{\eta_1 \eta_2 \Omega_1 \Omega_2}{\delta^2} \left[\frac{\delta \sin(2\mu t)}{2\mu} - \frac{\delta \sin[(\mu + \nu)t]}{\mu + \nu} - \frac{\delta}{\mu + \nu} (\delta t - \sin \delta t) \right].$$

根据式 (5.87), 两项带来的不保真度为:

1) 相空间位移:

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{+-}|^2}{2} &= \frac{(\eta_1 \Omega_1 + \eta_2 \Omega_2)^2 + (\eta_1 \Omega_1 - \eta_2 \Omega_2)^2}{8(\mu + \nu)^2} |1 - e^{i(\mu+\nu)t}|^2 \\ &\leq \frac{(\eta_1 \Omega_1)^2 + (\eta_2 \Omega_2)^2}{4\mu^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\mu} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.99)$$

2) 旋转角度误差:

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\eta_1 \eta_2 \Omega_1 \Omega_2}{\delta^2} \right)^2 \left[\frac{\delta \sin(2\mu t)}{2\mu} - \frac{\delta \sin[(\mu+\nu)t]}{\mu+\nu} - \frac{\delta}{\mu+\nu} (\delta t - \sin \delta t) \right]^2}{4} \\ &= \frac{1}{64} \left[\frac{\delta \sin(2\mu t)}{2\mu} - \frac{\delta \sin(2\mu t + 2\pi)}{\mu + \nu} - \frac{\delta}{\mu + \nu} (2\pi - \sin 2\pi) \right]^2 \\ &= \frac{1}{64} \left[\frac{\delta^2 \sin(2\mu t)}{2\mu(\mu + \nu)} - \frac{2\pi\delta}{\mu + \nu} \right]^2 \\ &\approx \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\delta}{2\mu} \right)^2 \\ &\approx \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\mu} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.100)$$

以上两项相加，即为二阶声子失谐误差：

$$\epsilon_{\text{phon2}} \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16} \right) \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\mu} \right)^2. \quad (5.101)$$

(4) 声子空间非相干误差项 以下列出声子相关非相干误差的常用估算形式（此处主要关注量级与标度；更完整推导与实验误差模型可参考高保真两比特门工作^[102-103]以及电场噪声/运动退相干综述与实验^[43,108]）：

1. 有限热占据（LD 高阶项）带来的误差：

$$\epsilon_{\text{th}} \simeq \frac{\pi^2}{4} \eta^4 \bar{n}(2\bar{n} + 1). \quad (5.102)$$

2. 门过程中加热带来的误差：

$$\epsilon_{\text{heat}} \simeq \frac{\dot{n} t_g}{2K}, \quad (5.103)$$

其中 t_g 为门时间， K 为相空间闭合圈数， $\dot{n}$ 为加热率（quanta/s）。该表达式反映“门期间吸收的平均声子数”对门误差的线性贡献，且多圈轨迹可在一定程度上抑制该项（见^[102-103]；加热率与电场噪声的关系综述见^[43]）。

3. 声子相干性衰减（运动退相干）带来的误差：

$$\epsilon_{\text{mot-deph}} \simeq \alpha_K \frac{t_g}{\tau}, \quad (5.104)$$

其中 τ 为声子相干时间（或有效退相干时间）， α_K 为与门波形、闭合圈数及噪声谱形有关的 $\mathcal{O}(1)$ 系数，对 $K = 1, 2, 4$ ， $\alpha_K = 0.686, 0.297, 0.137$ ^[108]。

误差项汇总 综合以上主导项，可将 MS 门不保真度按“相干/退相干”两部分写成：

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{coh}} \simeq & \underbrace{\frac{\pi^2 K^2}{4} \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\eta_2 \Omega_2} + \frac{\eta_2 \Omega_2}{\eta_1 \Omega_1} \right) \left(\frac{d\delta}{\delta} + \frac{\delta t}{t} \right)^2}_{\text{相空间不闭合}} + \underbrace{\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\delta \Omega_1}{\Omega_1} + \frac{\delta \Omega_2}{\Omega_2} - 2 \frac{d\delta}{\delta} \right)^2}_{\text{纠缠相位误差}} \\ & + \underbrace{(\delta \phi_s)^2}_{\text{门相位零点误差}} + \underbrace{\epsilon_{\text{imb}} + \epsilon_{\text{center}} + \epsilon_{\text{carrier}} + \epsilon_{\text{phon2}}}_{\text{额外项与 RWA 相关项}}, \end{aligned} \quad (5.105)$$

以及：

$$\epsilon_{\text{dec}} \simeq \epsilon_{\text{th}} + \epsilon_{\text{heat}} + \epsilon_{\text{mot-deph}}. \quad (5.106)$$

式 (5.105) – (5.106) 给出了后续与实验标定项（失谐漂移、幅度漂移、相位漂移、加热率、声子相干时间）做一一对应误差预算与量级估算的理论框架。

5.3.3 采样误差与读出误差的不确定度分析

通过实验数据获取目标物理量（如门保真度）时，必须充分考虑两个关键问题：第一，实验数据源于有限次数的量子投影采样，必然带有统计不确定度；第二，原始实验数据及目标物理量的解析关系均会受到态制备与测量（SPAM）误差

的系统性影响。对于一般实验而言,为了消除 SPAM 误差的影响,可以采用第 3 章 (3.4.3 节)所述的误差缓解 (Error mitigation) 方法,但对数据进行经典后处理的同时也会引入额外的不确定度传递。针对上述要点,本节分三个递进的层次进行讨论:有限采样的多项分布统计涨落、无误差缓解时 MS 门保真度的系统性失真,以及实施误差缓解情况下的双重不确定度评估。

有限采样的多项分布统计涨落与协方差

在物理实验和统计数据分析中,最通用的一阶不确定度传递公式 (Error propagation formula) 是基于多元函数的泰勒展开 (Delta 方法) 推导出来的。假设需要计算的间接测量物理量 y 是由 n 个直接测量变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 决定的函数,即:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.107)$$

若已知每个变量 x_i 的标准差 (不确定度) 为 σ_{x_i} , 且变量 x_i 与 x_j 之间的协方差为 $\text{Cov}(x_i, x_j)$, 则 y 的方差 (不确定度平方) σ_y^2 的最一般公式如下:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \text{Cov}(x_i, x_j). \quad (5.108)$$

在表征两比特 MS 门或多比特量子态时,单次测量 (shot) 的结果是相互排斥的计算基态输出。对于包含 n 个量子比特的系统,观测频次向量 $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{K-1})^T$ 服从多项分布 (Multinomial distribution), 其中 $K = 2^n$ 。

在简化的误差分析中,常假定各状态概率 P_i 的不确定度相互独立。然而,由于闭合系统归一化条件 $\sum_{i=0}^{K-1} P_i = 1$ 的硬性约束,来自同一组实验数据的 P_i 实际上是存在负相关的随机变量。这意味着,在严格评估由多个状态概率线性组合构成的物理量时,必须计入非对角协方差项。由多项分布的性质可知,观测概率估计值 $\hat{P}_i = n_i/N$ (N 为总测量次数) 的协方差矩阵元素为:

$$\text{Cov}(\hat{P}_i, \hat{P}_j) = \frac{1}{N} \begin{cases} \hat{P}_i(1 - \hat{P}_i), & i = j \\ -\hat{P}_i\hat{P}_j, & i \neq j \end{cases}. \quad (5.109)$$

为了减少数据处理的复杂度,通常可直接将复合的目标物理量视为单一的随机变量以简化不确定度传递计算。例如,在 MS 门保真度或 GHZ 态保真度的计算中,往往需要提取偶宇称子空间布居总和 $S = P_{0\dots 0} + P_{1\dots 1}$ 。其真实的统计标准差应为:

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_{0\dots 0}) + \text{Var}(\hat{P}_{1\dots 1}) + 2\text{Cov}(\hat{P}_{0\dots 0}, \hat{P}_{1\dots 1})} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{P}_{0\dots 0}(1 - \hat{P}_{0\dots 0}) + \hat{P}_{1\dots 1}(1 - \hat{P}_{1\dots 1}) - 2\hat{P}_{0\dots 0}\hat{P}_{1\dots 1}}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{S(1 - S)}{N}}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

这表明，与其单独计算各分量的方差、协方差后再合成不确定度，不如直接将 S 作为单一项的二项分布变量处理，后者在计算上更加简便且数学上严格等价。

无误差缓解时的 MS 门系统性失真

SPAM 误差作用下的单比特有效测量算符。对单比特 Z 基测量，理想 POVM 元为：

$$\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|, \quad \Pi_1 = |1\rangle\langle 1|. \quad (5.111)$$

结合第 3 章定义的单比特混淆矩阵 M （见式 (3.53)）^[84-85]，可把含读出误差的 POVM 元写成：

$$\tilde{\Pi}_m = \sum_{n=0,1} M_{mn} \Pi_n, \quad \Rightarrow \quad p_m^{\text{obs}} = \text{Tr}(\tilde{\Pi}_m \rho). \quad (5.112)$$

显式写出即为：

$$\tilde{\Pi}_0 = (1 - \epsilon_{01})\Pi_0 + \epsilon_{10}\Pi_1, \quad \tilde{\Pi}_1 = \epsilon_{01}\Pi_0 + (1 - \epsilon_{10})\Pi_1. \quad (5.113)$$

因此，实际测得的单比特 Z 期望值满足：

$$\langle Z \rangle_{\text{obs}} = (+1)p_0^{\text{obs}} + (-1)p_1^{\text{obs}} = \text{Tr}[(\tilde{\Pi}_0 - \tilde{\Pi}_1)\rho] \equiv \text{Tr}(\tilde{Z}\rho), \quad (5.114)$$

其中：

$$\tilde{Z} \equiv \tilde{\Pi}_0 - \tilde{\Pi}_1 = \kappa Z + \lambda I, \quad \kappa \equiv 1 - \epsilon_{01} - \epsilon_{10}, \quad \lambda \equiv \epsilon_{10} - \epsilon_{01}. \quad (5.115)$$

于是得到一条重要的仿射关系：

$$\langle Z \rangle_{\text{obs}} = \kappa \langle Z \rangle_{\text{true}} + \lambda. \quad (5.116)$$

这里 κ 表示读出对比度衰减， λ 表示由非对称误判率引入的偏置项。

SPAM 误差作用下的两比特 parity 测量。对两比特系统，parity 测量对应的理想算符为：

$$\Pi \equiv \langle Z_1 Z_2 \rangle, \quad \Pi_{\text{obs}} = \text{Tr}[(\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2)\rho]. \quad (5.117)$$

利用式 (5.115) 可得：

$$\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 = (\kappa Z_1 + \lambda I)(\kappa Z_2 + \lambda I) = \kappa^2 Z_1 Z_2 + \kappa \lambda (Z_1 + Z_2) + \lambda^2 I, \quad (5.118)$$

从而：

$$\Pi_{\text{obs}} = \kappa^2 \Pi_{\text{true}} + \kappa \lambda \langle Z_1 + Z_2 \rangle_{\text{true}} + \lambda^2. \quad (5.119)$$

若在测量前施加分析脉冲 $R(\phi)^{\otimes 2}$ ，则有：

$$\Pi_{\text{obs}}(\phi) = \kappa^2 \Pi_{\text{true}}(\phi) + \kappa \lambda \left(\langle Z_1 \rangle_{\text{true}}(\phi) + \langle Z_2 \rangle_{\text{true}}(\phi) \right) + \lambda^2. \quad (5.120)$$

对任意两比特态 ρ ，理想 parity oscillation 可写为：

$$\Pi_{\text{true}}(\phi) = \text{Tr}[(Z_1 Z_2) R(\phi)^{\otimes 2} \rho R^\dagger(\phi)^{\otimes 2}] = 2 \text{Re}[\rho_{00,11} e^{-i2(\phi+\pi/2)}] + \rho_{01,10} + \rho_{10,01}, \quad (5.121)$$

而单比特分析脉冲后的观测量满足：

$$\langle Z \rangle_{\text{true}}(\phi) = \text{Tr}[R^\dagger(\phi)\sigma_z R(\phi)\rho] = \cos\phi \text{Tr}(\sigma_x\rho) + \sin\phi \text{Tr}(\sigma_y\rho). \quad (5.122)$$

由式 (5.120) – (5.122) 可见， λ 相关项只会贡献常数项与一倍频项，而 Bell 态保真度拟合中使用的是二倍频振荡幅度。因此实验拟合得到的对比度满足：

$$C_{\text{obs}} = \kappa^2 C_{\text{true}}, \quad \kappa = 1 - \epsilon_{01} - \epsilon_{10}. \quad (5.123)$$

MS 门保真度的 SPAM 误差影响。记偶宇称布居之和为 $E \equiv P_{00} + P_{11}$ ，则理想 Bell 态保真度可写为：

$$F = \frac{1}{2}(E + C). \quad (5.124)$$

把读出混淆矩阵展开到两比特测量结果上，可得：

$$P_{00}^{\text{obs}} = (1 - \epsilon_{01})^2 P_{00} + (1 - \epsilon_{01})\epsilon_{10}(P_{01} + P_{10}) + \epsilon_{10}^2 P_{11}, \quad (5.125)$$

$$P_{11}^{\text{obs}} = \epsilon_{01}^2 P_{00} + \epsilon_{01}(1 - \epsilon_{10})(P_{01} + P_{10}) + (1 - \epsilon_{10})^2 P_{11}. \quad (5.126)$$

结合式 (5.123) 与式 (5.124)，可将真实保真度写成：

$$F_{\text{true}} = \frac{(P_{00} + P_{11} + C)_{\text{obs}} - \lambda(P_{00} - P_{11})_{\text{obs}} - \epsilon_{01}(1 - \epsilon_{01}) - \epsilon_{10}(1 - \epsilon_{10})}{2\kappa^2}. \quad (5.127)$$

在实验中常见的近似是 $\epsilon_{01} \approx \epsilon_{10} \equiv \epsilon_m$ ，此时有：

$$F_{\text{obs}} = (1 - 2\epsilon_m)^2 F_{\text{true}} + \epsilon_m(1 - \epsilon_m), \quad \Rightarrow \quad F_{\text{true}} = \frac{F_{\text{obs}} - \epsilon_m(1 - \epsilon_m)}{(1 - 2\epsilon_m)^2}. \quad (5.128)$$

由式 (5.128) 可知：即使门本身完美无瑕，有限的 SPAM 误差也会系统性地压低观测到的 Bell 态保真度。因此，在比较不同离子对、不同门时间或不同脉冲参数下的实验结果时，必须明确区分“原始观测保真度”和“经读出误差修正后的真实门保真度”。

误差缓解情况下的双重不确定度评估

遵照第 3 章 (3.4.3 节) 给出的方法，在经典后处理中可采用基于期望最大化 (EM) 算法的最大似然估计来进行误差缓解。在 EM 算法的框架下，最终物理指标的不确定度受到两个独立随机过程的双重影响：

1. **测量层统计涨落 (Shot noise)：**对目标线路进行 N 次采样得到的观测频次向量 $\mathbf{n}$ 本身的随机性。
2. **标定层不确定度 (Calibration uncertainty)：**表征系统读出性能的混淆矩阵 $\mathbf{M}$ 是通过独立的态制备与测量定标实验获得的。有限的标定采样导致矩阵元 M_{ji} 带有内禀的统计方差，这一方差会作为“系统误差基底”传播到后续的 EM 算法中。

由于 EM 算法涉及高度非线性的迭代映射过程，解析推导其误差传播极其困难且容易失效。为此，本工作采用两级 Bootstrap 重采样方法 (Two-level bootstrap resampling)^[109] 来稳健地评估最终的置信区间：

设标定实验的采样数为 N_{cal} ，线路测量的采样数为 N_{shots} 。在第 b 次 Bootstrap 循环中（共进行 B 次，如 $B = 1000$ ），包含如下步骤：

- **步骤 1:** 根据原始标定数据服从的多项分布，重采样生成虚拟的标定频次，并重新构建虚拟混淆矩阵 $\mathbf{M}^{(b)}$ 。
- **步骤 2:** 根据目标线路的原始观测分布 $\mathbf{n}/N_{\text{shots}}$ ，重采样生成一组虚拟的观测频次向量 $\mathbf{n}^{(b)}$ 。
- **步骤 3:** 以 $\mathbf{M}^{(b)}$ 为信道模型，对 $\mathbf{n}^{(b)}$ 运行完整的 EM 算法，得到该次循环的真实分布估计 $\hat{\mathbf{p}}^{(b)}$ 。
- **步骤 4:** 利用 $\hat{\mathbf{p}}^{(b)}$ 计算该次循环的目标物理量（假设目标量为保真度 $\mathcal{F}_{\text{GHZ}}^{(b)}$ ）。

完成 B 次循环后，目标物理量的总标准误差即可由这 B 个重采样结果的经验标准差（Empirical standard deviation）给出：

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\mathcal{F}^{(b)} - \bar{\mathcal{F}})^2}. \quad (5.129)$$

5.3.4 多离子链中的 MS 门调制方法

由第 5.2 节可知，MS 门需要同时满足相空间闭合条件和几何相位积累匹配条件。然而，在多离子链中直接使用简单的矩形脉冲会面临两个实际问题。其一，沿给定方向存在 N 个正则模（normal modes）。当 Raman 光对多离子施加 MS 相互作用时，所有模式都会以不同权重参与动力学；若仅针对某一个主模式满足闭合条件，则其余相关模式在门结束时一般仍满足 $\alpha_p(t) \neq 0$ ，从而留下残余的自旋-运动纠缠并造成门误差。其二，理想的相空间闭合条件通常对实验参数较为敏感，尤其对声子频率漂移、门失谐设定误差以及门时长误差比较敏感。除此之外，矩形脉冲在时域上具有突变边界，其频谱包含较强的高频旁瓣，更容易非共振地激发载波项与旁观模；这一问题在快门条件下或模间距较小时尤为突出。基于上述原因，在多离子链中通常需要引入波形调制（pulse shaping）等方法，以同时兼顾多模解耦、目标几何相位积累以及对实验漂移的鲁棒性。本文介绍两种主流且在本工作中实际使用的调制方法，更详细的原理可参照相关文献^[98,100,110-111]。

1. 幅度调制方案

将式（5.57）推广到多模并允许时间依赖幅度 $\Omega(t)$ ，可写为^[97,100]：

$$H_I(t) = \hbar \sum_j \sum_p \frac{\eta_{j,p} \Omega(t)}{2} \sigma_{\phi_s}^{(j)} \left(a_p e^{-i\delta_p t} + a_p^\dagger e^{+i\delta_p t} \right), \quad \delta_p \equiv \mu - \omega_p, \quad (5.130)$$

其中 μ 为红蓝双音信号相对载波的频率偏移，对每个模式 p 的有效失谐记为 δ_p 。由与单模情形类似的 Magnus 展开可知，系统演化中每个模式都会获得一个自旋依赖位移：

$$\alpha_{j,p}(t) = -\eta_{j,p} \int_0^t \Omega(t') e^{i\delta_p t'} dt', \quad (5.131)$$

同时累积几何相位 $\chi_{i,j}(t)$ ，其在门结束时决定不同离子对之间的有效耦合强度。若将门时长 τ 划分为 P 段、每段幅度为 Ω_k ，则第 p 模的相空间位移可进一步写成：

$$\alpha_{j,p}(t) \propto \int_0^t \Omega(t') e^{i\theta_p(t') + i\phi(t')} dt', \quad (5.132)$$

其中

$$\theta_p(t) = \int_0^t \delta_p(t') dt'.$$

这里， $\Omega(t)$ 表示有效 Rabi 频率，可通过调节激光幅度实现； $\delta(t)$ 表示 MS 门激光相对红蓝边带的失谐量，可通过调节激光频率实现； $\phi(t)$ 为激光相位。实验上，这些参数通常通过加载在 AOM 上射频信号的幅度、频率和相位进行控制。

从控制目标来看，MS 门需要求解一组 $\Omega(t)$ ，使所有相关模式在门结束时都满足

$$\alpha_{j,p}(T) = 0,$$

即实现多模相空间闭合；与此同时，对应的几何相位也需要满足目标相位匹配条件^[97,100]。在实际优化中，除了满足闭合与相位匹配条件之外，还常常进一步加入鲁棒性约束，例如要求

$$\left. \frac{\partial \alpha_p}{\partial \delta_k} \right|_T = 0,$$

从而使门操作对某些低阶参数漂移不敏感；若进一步约束更高阶导数，则可获得更高阶鲁棒性条件。因而，幅度调制的核心思想并不仅是“改变包络形状”，而是通过在时域上重新分配驱动权重，使多个模式的相空间轨迹在终点同时逼近闭合，并尽量降低对频率漂移和门时误差的灵敏度。

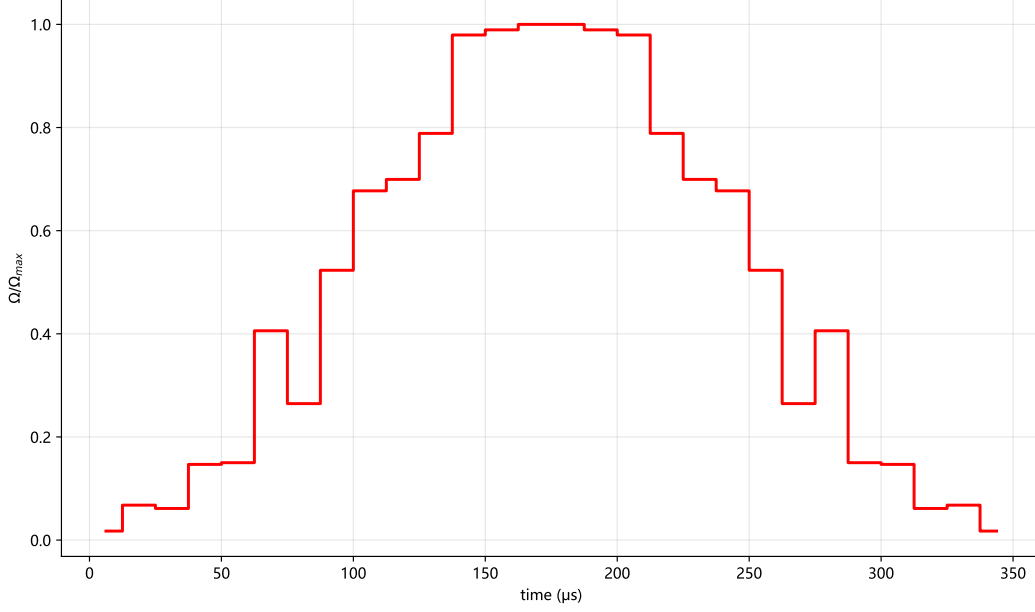


图 5.3 幅度调制典型参数设置。图中给出了按离散时间段优化得到的归一化 Rabi 频率包络 $\Omega(t)/\Omega_{\max}$ 。不同时间段的幅度权重共同决定各运动模式在相空间中的演化轨迹；通过数值优化，可在门结束时同时逼近多模闭合条件并满足目标几何相位条件。

图 5.3 给出了一组根据典型实验参数优化得到的幅度调制包络。可以看到，该包络一般不再是简单的矩形脉冲，而是在门时域内呈现分段变化。

2. 平滑调制门 (smooth gate) 方案

在上述分段幅度调制框架中， $\Omega(t)$ 在各段边界处一般是不连续的，其频谱中包含较强的高频旁瓣，因而更容易驱动离共振的旁观模与载波项（尤其在快门条件下或模间距较小时）。一种实验上非常常见且与“多段优化”兼容的改进思路是使用 smooth gate。其基本出发点是在保持目标几何相位匹配条件的同时，让门脉冲在起始和结束阶段平滑地接通与关断，从而降低频谱泄漏。就本文的实现与数值优化而言，可将其理解为在原有调制框架上进一步引入平滑包络条件：令 $\Omega(t)$ 在 $t = 0$ 与 $t = \tau$ 处平滑地上升/下降，满足 $\Omega(0) = \Omega(\tau) = 0$ ，并可进一步要求

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{0,\tau} = 0,$$

以进一步减小高频分量。这样的平滑边界条件能够显著抑制由载波失谐耦合引起的快速振荡，并降低门操作对初始相位 ζ 的敏感性；从实验角度看，也有助于减小对声子频率漂移和模式占据变化的敏感度^[98,111]。

上述物理图像可以通过对失谐积分作分部积分得到更直观的说明^[98,111]：

$$\begin{aligned} \int_0^T \Omega(t) e^{i\delta t} dt &= \frac{1}{i\delta} \int_0^T \Omega(t) d e^{i\delta t} \\ &= \frac{1}{i\delta} \Omega(t) e^{i\delta t} \Big|_0^T - \frac{1}{i\delta} \int_0^T e^{i\delta t} \Omega'(t) dt. \end{aligned} \quad (5.133)$$

由式 (5.133) 可见, 在原幅度调制的基础上, 若进一步要求 $\Omega(0) = \Omega(T) = 0$, 则第一项严格为零; 此时残余项主要由 $\Omega'(t)$ 决定, 即

$$\left| \frac{1}{i\delta} \int_0^T e^{i\delta t} \Omega'(t) dt \right| \lesssim \frac{\Omega'_{\max} t_{\text{ramp}}}{\delta}.$$

这表明, 通过限制包络斜率 $\Omega'(t)$ 的大小并适当增大平滑上升/下降时间 t_{ramp} , 可以有效抑制远失谐模式上残留的相空间位移。进一步地, 若还要求更高阶导数在边界处连续, 则通过重复分部积分可获得更强的高频抑制, 因此 smooth gate 在频谱意义上天然优于边界突变的矩形或简单分段脉冲。

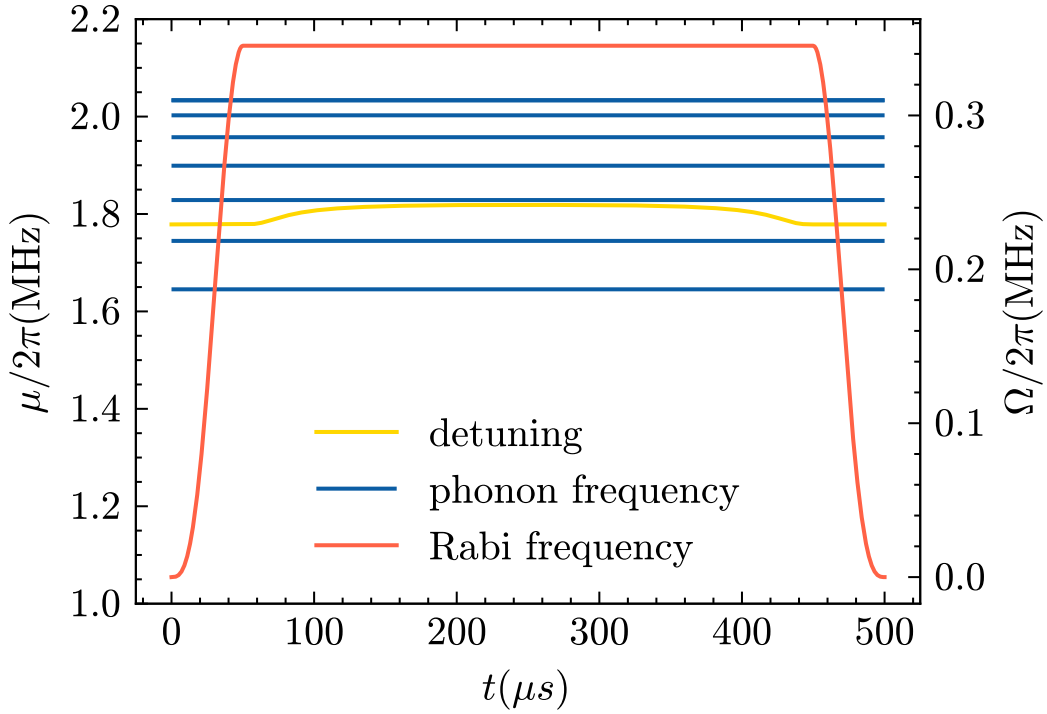


图 5.4 smooth gate 典型参数设置。图中同时示出了平滑的 Rabi 频率包络、门失谐 detuning 以及相关 phonon frequency 的相对位置。右侧刻度为 Rabi 频率, 左侧刻度为 detuning 和 phonon frequency。平滑接通/关断的包络有助于降低高频旁瓣, 从而减小对载波项及近失谐旁观模的非共振激发。

图 5.4 给出了一组根据典型实验参数优化得到的 smooth gate 参数设置。可以看到, 相比于简单分段 AM 方案, smooth gate 并不是放弃优化条件, 而是在满足多模闭合与目标相位条件的同时, 额外加入平滑边界约束。因此, 两者并非彼此替代, 而是可以结合使用: 前者主要负责满足多模闭合与鲁棒性约束, 后者则进一步从频谱结构上抑制非共振耦合。对于多离子链而言, 这种联合优化思路通常更有利于在有限门时下兼顾保真度、鲁棒性与实验可实现性。

5.4 本章小结

本章围绕基于 Raman 操作的离子量子门理论展开了系统分析。首先, 从电磁场作用下的二能级 Rabi 模型出发, 推导了 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细量子比特在远失谐条件下的双光子 Raman 有效哈密顿量, 给出了 Raman Rabi 频率、微分 AC Stark shift 及多激发态修正等关键表达式, 并进一步将理论推广到包含声子外态的情形, 建立了载波跃迁、红蓝边带跃迁及热态平均动力学的统一描述。随后, 本章介绍了 Mølmer-Sørensen 门的基本实现原理, 结合相空间闭合与几何相位积累条件, 给出了两比特 MS 门的么正演化形式及 Bell 态保真度的常用测量表达式。在此基础上, 进一步从相干误差、退相干误差以及采样与读出误差三个层面, 对单比特门和两比特 MS 门的主要误差来源进行了分类讨论与量级估算, 并结合多离子链情形说明了幅度调制与 smooth gate 等波形工程方法在抑制多模残余耦合、提高参数鲁棒性方面的重要作用。同时, 围绕相干误差与寻址相关误差的归因与量级估算, 为后续在深量子线路与纠错循环中构建近似局域噪声模型、制定标定与补偿策略提供了理论支撑^[12,49]。从面向容错量子计算的角度看, 上述误差分类与量级估算不仅服务于单次门优化, 更是后续评估量子线路误差预算、判断系统是否逼近纠错阈值的理论基础。综上, 本章在已有文献^[18,95-97,99-100]基础上, 整理并建立了从 Raman 有效耦合、MS 门构造到误差预算与脉冲调制优化的理论框架, 为下一章中 Raman 操控系统的参数标定、声子模式表征以及单、双比特门实验结果分析提供了直接的理论依据。

第6章 高保真度量量子门实验实现

在前几章完成离子稳定囚禁、 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础测控，以及 Raman / MS 门理论分析之后，本章转而聚焦于高保真度寻址量子门线路的实验实现。相较于仅验证单个物理过程或单次纠缠态制备，本章更关注一套能够稳定支撑可编程量子线路执行的门级能力：它既要在超远失谐 Raman 驱动下提供高相干的单、双比特操作，又要在多离子链中实现低串扰寻址、运动模可标定性以及长时间运行稳定性。对于后续第7章中的 GHZ 态制备与 QV32 验证而言，本章建立的门级指标与误差预算构成了系统级线路性能的直接物理基础。

从量子纠错与容错线路执行的角度看，除了平均门不保真度的量级之外，噪声的局域性、相关性以及相干误差的累积效应同样关键：系统性串扰若不被抑制，往往会在深线路与纠错循环中转化为更不利的相关误差通道，从而抬高实现容错所需的工程裕度^[12,49]。依托高通光平台提供的光路自由度与声光偏转器（AOD）构成的低串扰 Raman 系统，在空间寻址灵活性、光束整形能力以及串扰抑制方面具有明显优势，尤其适用于多离子寄存器中的可编程单比特门与选定离子对之间的两比特门操作^[16,112]。

与此同时，Raman 激光系统的频率稳定性、相位噪声与功率稳定性，以及与离子振动模频率的精细匹配，直接决定了门保真度及其在长量子线路中的可重复性。门性能表征方面，本章主要采用随机基准（RB）及 character randomized benchmarking（CRB）方法，在抑制 SPAM 影响与提取平均门错误率方面具有明显优势，但其结果解释依赖于噪声模型的合理解释^[113-116]。

本章在已发表工作基础上^[16,112]，对 Raman 寻址系统、门标定流程、CRB 表征与误差预算进行系统总结。首先介绍在本平台上构建的超远失谐 Raman 激光系统，包括双频产生链路、倍频与放大模块、频率与功率稳定措施以及与离子链几何相匹配的寻址光路；随后重点描述基于 AOD 的低串扰寻址方案及其实验表征。接着，在该 Raman 系统上开展离子声子模式表征实验，通过边带谱、加热率与相干时间测量为两比特 MS 门参数选择提供直接输入。在此基础上，给出单比特 Raman 门与两比特 MS 门的实验实现与 RB/CRB 表征结果，并结合实验标定对主要误差来源进行归因分析。

6.1 面向可编程量子线路的 Raman 寻址操控系统

6.1.1 超远失谐 Raman 激光系统搭建与性能表征

对于以 $^{171}\text{Yb}^+$ 超精细基态 $|0\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 与 $|1\rangle \equiv {}^2S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 构成的量子比特，受激 Raman 跃迁是实现高保真单比特门与多比特纠缠门（如 MS 门）的关键操控手段。为了在长量子线路中抑制自发散射与相位噪声所造成的累积误差，我们采用相对于 ${}^2P_{1/2}$ 等激发态超远失谐的 Raman 驱动。增大单光子失谐 Δ 可显著降低自发散射导致的门错误；但在固定束腰条件下，两光子 Rabi 频率近似满足 $\Omega_R \propto I/\Delta$ ，因此需要更高的入射光强与更小的束腰。高通光结构为本系统提供了多向光路与大 NA 聚焦的实验自由度，使得在超远失谐条件下仍能获得可观的 Rabi 频率，并为多离子链的低串扰寻址提供先决条件^[16,65,112]。

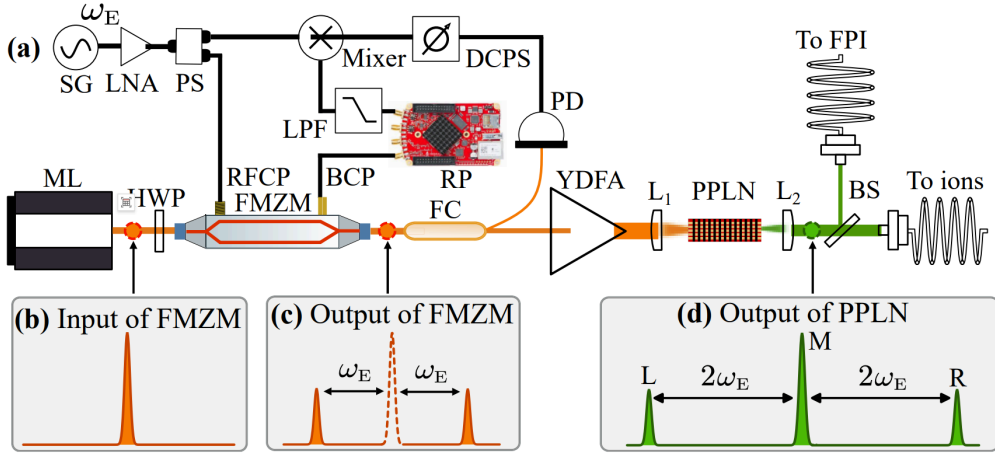


图 6.1 (a) 仅由拉曼光束 I 单独驱动的 Rabi 振荡，Rabi 频率为 $2\pi \times 662.3$ kHz；此时仅对离子进行多普勒冷却。(b) 以拉曼光束 I 与 II 作为对向传播的拉曼光束驱动的载波 Rabi 振荡，Rabi 频率为 $2\pi \times 42.5$ kHz；此时对离子同时实施多普勒冷却与 EIT 冷却。图源^[112]。

(1) 系统链路概览：如图 6.1 所示，本系统的激光产生链路可概括为：

1. **种子光与频率基准**：采用 1064 nm 单频种子光（monochromatic laser, ML），通过 PDH 等技术锁定到参考腔以获得低频漂、窄线宽输出（锁频细节本文其他章节已述，此处不赘述）。
2. **FMZM 载波抑制双边带调制**：将 1064 nm 种子光注入 FMZM，工作于最小透过点并满足弱调制，得到仅包含两条一阶边带的“CS-DSB”光谱（carrier-suppressed double sideband）。
3. **功率放大与倍频**：将 CS-DSB 双频光送入掺镱光纤放大器（YDFA）放大至瓦级，再通过 PPLN 晶体单程倍频产生 532 nm 多频连续光（典型输出 1.5 W）。

为了直接验证 532 nm 输出的三频结构及频差可调性, 可将少量光耦合到扫描法布里-珀罗干涉仪, 在示波器上观察透射峰序列。

4. **光纤传输与实验分束:** 由于 532 nm 连续光易于耦合到保偏单模光纤, 可将高功率操控光可靠地输运至阱平台; 随后利用 PBSU (HWP+PBS+QWP+ 镜) 分为两臂光路, 为后续 Raman 推动力学 (动量差 Δk) 与 AOD 寻址做准备。

(2) FMZM 调制与倍频后的三频结构: 该光调制装置的核心器件为 FMZM。FMZM 属于电光强度调制器, 其核心为铌酸锂波导集成的马赫-曾德干涉仪 (MZI)。入射光场在第一个 Y 型分支被等分为上下两臂, 各臂在电极作用下经电光效应获得相位调制, 最终在第二个 Y 型分支干涉叠加输出。FMZM 通常提供两个电端口: DC 偏置控制端口 (bias control port, BCP) 用于设定静态相位差 (即工作点), 射频控制端口 (RF control port, RFCP) 用于加载高频调制信号。

令输入光场为: $E_{in}(t) = E_0 e^{i\omega t}$, RF 信号在上下两臂引入等幅反相的相位调制, 并叠加由偏置电压产生的静态相位差 $\Delta\phi_b$ 。将调制深度 (相位摆幅) 记为 $\Delta\phi_R$, 射频角频率记为 ω_E 。在载波抑制 (carrier-suppressed, $\Delta\phi_b = \pi$) 和弱调制条件 ($\Delta\phi_R \ll 1$) 条件下, FMZM 输出的 1064 nm 双频场简写为:

$$E_{1064}(t) = E_+ e^{i(\omega+\omega_E)t} + E_- e^{i(\omega-\omega_E)t}, \quad (6.1)$$

其中 $E_{\pm} \propto \alpha(\Delta\phi_R/4)E_0$ 。在二次谐波过程中, 非线性极化满足 $P^{(2)}(t) \propto E_{1064}^2(t)$, 因此会自然产生三类频率项:

$$E_{532}(t) \propto E_{1064}^2(t) = E_+^2 e^{i2(\omega+\omega_E)t} + E_-^2 e^{i2(\omega-\omega_E)t} + 2E_+ E_- e^{i2\omega t}. \quad (6.2)$$

式 (6.2) 表明: 532 nm 输出天然形成一个可通过 RF 输入信号 ω_E 调节频差的三频连续光。

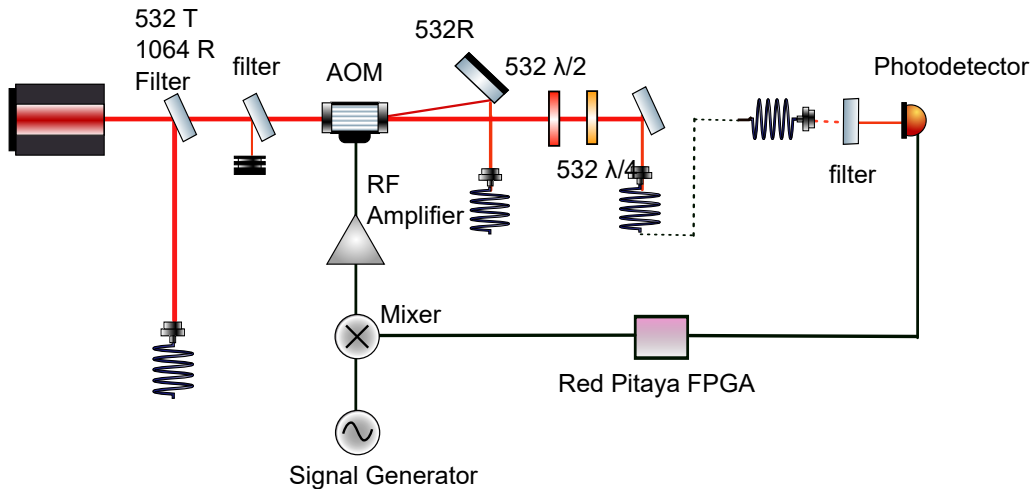


图 6.2 532 nm 空间功率稳定光路原理图。图中利用 AOM 的 0 级光作为 Raman 操控光, 并以 +1 级光作为功率监测与频率跟踪支路, 从而为长时间门实验提供稳定的入射光功率。

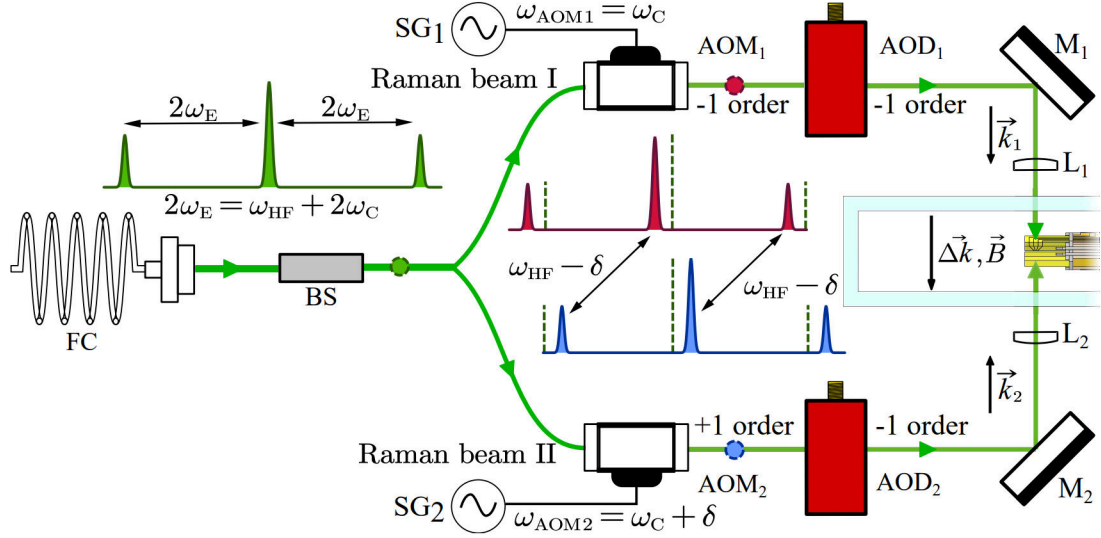


图 6.3 驱动受激拉曼跃迁的实验装置简图。532 nm 激光由光纤耦合器输出，经分束器分为两路并沿两条光路传播。透镜用于将光束聚焦到更小的光斑，以获得更高的 Rabi 频率。为简洁起见，图中未画出用于旋转偏振的部分光学元件。FC：光纤耦合器；BS：分束器；SG_i：信号源；AOM_i：声光调制器；AOD_i：声光偏转器；M_i：反射镜；L_i：透镜。图源^[112]。

532 nm 光束经由一个功率锁定空间光路（如图 6.2 所示，AOM 的 0 级光作为 Raman 操控光，+1 级光进入波长计用作频率监测）；经功率稳定后，光束通过耦合光纤被传输至阱平台寻址光路（见图 6.5）。图 6.3 给出了该系统的简化频率示意图。

实验上，将 FMZM 的驱动频率设定为 $\omega_E = \omega_{HF}/2 + \omega_C = 6.52$ GHz，其中 $\omega_{HF} = 12.6$ GHz 为离子比特能级频率， $\omega_C = 200$ MHz 为 AOM 的中心频率。在图 6.3 中绿色点所示的位置，相邻频率分量的频差为 $2\omega_E = 13.04$ GHz。当 Raman 两侧 AOM 的驱动频率分别取 $\omega_{AOM1} = \omega_C$ 与 $\omega_{AOM2} = \omega_C + \delta$ 时，通过 AOM 上 δ 的设定，可以形成不同的边带 Raman 驱动；如果在 AOM 上同时作用多个频率 δ_i ，则可同时驱动多个边带，如图 5.2 所示的光场频率分量即可用于实现 MS 门。

6.1.2 基于声光偏转器（AOD）的低串扰寻址光路

在多离子寄存器上执行可编程量子线路时，单独寻址（individual addressing, IA）是实现“局域单比特旋转 + 选定离子对两比特门”的基础能力之一；同时，寻址光束向邻近离子溢出会引入非期望旋转与相关误差^[12]。为此，本工作提出一种基于多物镜与声光偏转器（acousto-optic deflector, AOD）的低串扰光学寻址系统，采用对称构型。两束反向传播的 Raman 操作光均被紧聚焦，在目标离子处形成腰斑半径约为 $1 \mu\text{m}$ 的重叠光斑以实现寻址。

由寻址光束强度向邻近离子溢出所引起的 IA 串扰误差，可用非期望的 Rabi 频率串扰进行表征。该量定义为旁观离子 Rabi 频率与目标离子 Rabi 频率之比，即 Ω_S/Ω_T 。表 6.1 给出了本文工作与此前四类主流 IA 系统——多通道声光调制器（multiple-channel acousto-optic modulators, MCAOMs）、导光式单独寻址系统（guided-light individual addressing system, GLIAS）、声光偏转器（AODs）以及微机电系统（microelectromechanical systems, MEMSs）——的比较。图 6.4 示意了两种 IA 方案：均使用两束反向传播的激光，通过受激拉曼跃迁（stimulated Raman transition, SRT）^[117-120] 来驱动超精细原子量子比特。

表 6.1 不同 IA 系统的比较。其中 NA 表示各系统所用物镜的数值孔径。

IA 系统	NA	强度串扰	Rabi 频率串扰	离子间距
MCAOMs ^[121]	0.4	1×10^{-4}	1%–2%	$5 \mu\text{m}$
GLIAS ^[122]	0.4	1×10^{-4}	1%（估计）	$4 \mu\text{m}$
AODs ^[48]	0.6	4×10^{-6}	0.2%–1%	$3.5 \mu\text{m}$ （最小）
MEMSs ^[47]	0.6	4×10^{-6}	0.2%–0.6%	$5 \mu\text{m}$
本文工作	0.4×2	$< 1 \times 10^{-3}$	0.12%	$5.5 \mu\text{m}$

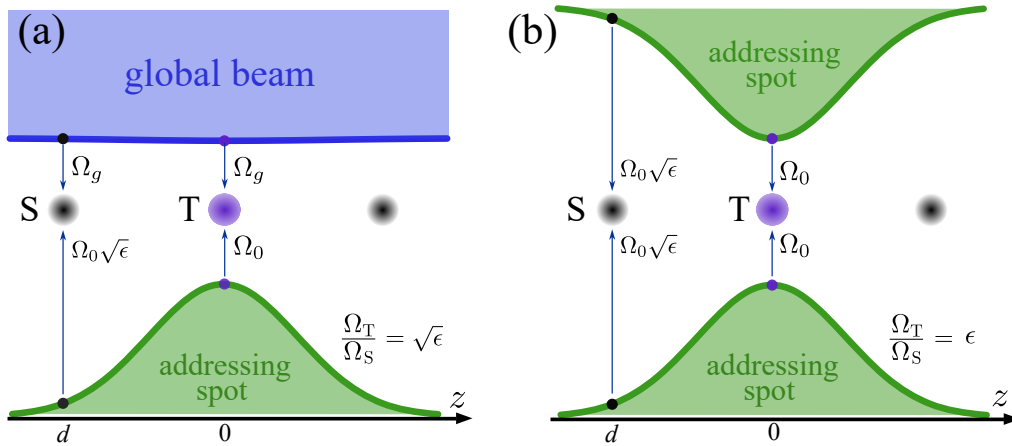


图 6.4 拉曼操作过程中两种不同寻址方法下 Rabi 频率串扰的对比示意图。(a) SSA 方法：目标离子 T 上有一个寻址光斑，同时所有离子上有一束全局光束。(b) DSA 方法：来自不同方向的两束寻址光斑在 T 处重叠。假设在某一寻址光斑下旁观离子 S 与目标离子 T 的强度比为 ϵ 且 $\epsilon \ll 1$ ，则 Rabi 频率串扰（以 Ω_S/Ω_T 表征）在 SSA 与 DSA 中分别为 $\sqrt{\epsilon}$ 与 ϵ （即 DSA 的串扰相比 SSA 低 $\sqrt{\epsilon}$ 倍）。图源^[16]。

在单侧寻址（single-side addressing, SSA）方案中，如图 6.4(a) 所示，目标离子 T 同时受到一束紧聚焦的 IA 光斑与一束覆盖所有离子的全局光束照射；全局光束同样照射旁观离子 S 。在该情况下，IA 串扰与 IA 光斑的强度串扰的平方根成正

比。迄今 SSA 方案所报道的最低 Rabi 频率串扰误差为 1.3×10^{-4} ^[46]（离子间距为 $7.4 \mu\text{m}$ ），但在实现纠缠门（离子间距为 $5 \mu\text{m}$ ）时会增大至 2×10^{-3} ^[47]。在双侧寻址（double-side addressing, DSA）方案中，如图 6.4(b) 所示，目标离子 T 同时被来自两侧的两束紧聚焦 IA 光斑重叠照射。由于旁观离子 S 的 Rabi 频率随强度串扰呈线性标度，相较 SSA，DSA 可实现显著的串扰抑制。

具有固定等间距 IA 光束的寻址系统（如 MCAOMs）适于与非均匀间距的离子量子比特进行对准；而 AOD 方法则可通过精细调节驱动信号频率，实现对非均匀间距离子的灵活对准。然而，先前采用交叉配置 AOD 的方案^[48]会产生额外光束，这些光束分布在离子链上方与下方并伴随非零频移，从而限制其在二维离子晶体中的应用。此外，额外光束的数量随 AOD 驱动信号中的多音频数目增加而增加，进而削弱寻址激光的有效功率。

为克服交叉配置 AOD 方案的局限，并结合 DSA 方案的优势，本文提出一种基于对称配置 AOD 的低串扰 DSA 系统。近年的集成光子芯片方案也展示了低串扰光学寻址的潜力^[123]；不过对于当前高通光刀片阱系统而言，自由空间对称 AOD 构型在光路重构灵活性以及与现有 Raman 门架构兼容性方面更具直接优势。利用该 DSA 系统，可为 SRT 光束设计对称的光学构型：两只 AOD 均采用 -1 级衍射，其朝向与轴向方向一致，从而抵消频移。

实验装置的光学搭建如图 6.5(a) 所示。532 nm 拉曼操作激光通过单模保偏光纤送入偏振分束单元（polarizing beam-splitter unit, PBSU），并在其中被分为两束。PBSU 由半波片、偏振分束棱镜、四分之一波片和反射镜组成。分束后的两路拉曼光沿两条对称配置的光路传播，并在离子位置重新合束，从而构成 Mach-Zehnder 干涉仪。

为表述方便，将干涉仪的两臂分别记为 ArmL 与 ArmR。鉴于干涉仪的对称性，以下以 ArmL 的光路为例进行说明。拉曼操作光首先由一对消色差透镜（L1 与 L2）进行扩束。置于两透镜之间的声光调制器（AOM, Gooch & Housego, 3200-121）用于在两束反向传播的拉曼操作光之间引入相对频移^[112]。在 ArmL 与 ArmR 上分别布置声光偏转器（AOD, AA Opto Electronic, DTSX-400），并将 AOD 产生的衍射光束列沿离子链方向排列。随后，AOD 的衍射光束经两面反射镜（M1、M2）反射，并由第二对透镜（L3 与 L4）进一步放大。最后，光束经数值孔径（NA）为 0.4 的物镜（OL1）聚焦到离子所在平面，在各离子位置形成寻址光斑。在光学构型保持对称的前提下，两臂中具有相同频移的衍射光束将照射到同一离子，从而抵消与位置相关的频移。

如图 6.5(c) 所示，成像系统的光轴与拉曼操作光所在平面垂直。此外，我们使用数值孔径为 0.4 的物镜（OL3）收集离子发出的荧光。第 4 章已经介绍的多通道光电倍增管（MC-PMT）由 32 个分段通道构成，相邻通道间距为 $200 \mu\text{m}$ ，通道宽度为

800 μm 。该配置使得多离子态能够并行探测：每个离子的荧光被导向 MC-PMT 的相应通道。为降低离子像在不同 MC-PMT 通道之间的强度串扰所导致的 MC-PMT 串扰，采用消色差透镜与光阑来减小成像光学像差。

为了表征 AOD 产生的多路 IA 光斑之间的强度串扰，将聚焦到离子平面的激光光斑重新成像到高动态范围相机上。AOD 在单频驱动信号作用下产生单个衍射 IA 光斑；随后依次增大驱动频率以获得九个衍射光斑。此处的驱动频率阵列对应于同时寻址多个离子时施加在 AOD 上的频率集合。将各个衍射 IA 光斑的图像拼接，得到如图 6.6(a) 所示的结果。图 6.6(a) 中的箭头给出了离子链方向，并定义了穿过 IA 光斑中心的截线；图 6.6(b) 给出了该截线上的光斑强度分布。由图 6.6(b) 可见，相邻离子位点的 IA 光斑串扰处于 1.0×10^{-3} 量级，表明 Rabi 频率串扰误差亦将处于同一量级。

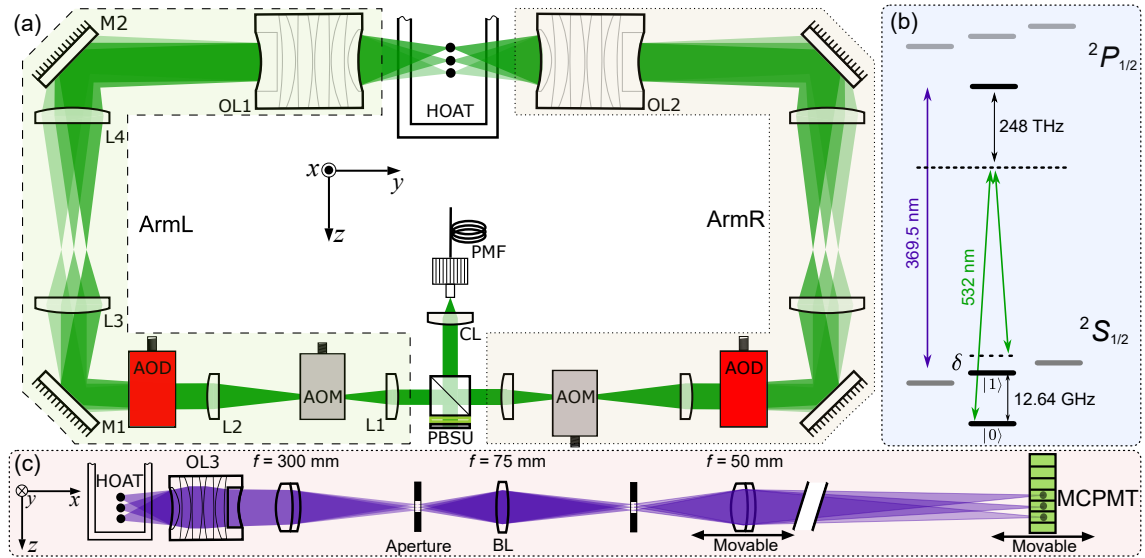


图 6.5 (a) 本文寻址系统的光学搭建示意图。为简洁起见，干涉仪的两条对称臂分别记为 ArmL 与 ArmR。(b) $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特能级示意图。多普勒冷却的跃迁波长为 369.5 nm（原图以紫色线标示），与 SRT 相关的能级以绿色线标示。(c) 成像系统的光学搭建示意图。最后一消色差透镜与 MC-PMT 之间的距离可调，从而将放大倍率从 200 调至 1000。HOAT：高光学通道离子阱；PBSU：偏振分束单元；CL：准直透镜；PMF：保偏光纤；AOM：声光调制器；AOD：声光偏转器；OL：物镜；BL：双凸透镜；MC-PMT：多通道光电倍增管。图源^[16]。在此特别说明：在本论文工作中后期，为了进一步提高光路对称性与偏振纯度，我们将 532 nm 光纤后的分光光路，从 PBSU 模块换成了图 4.3 所示的沃拉斯顿棱镜模块；此外，成像光路也做了如图 4.5 所示原理图的实验适配性调整。

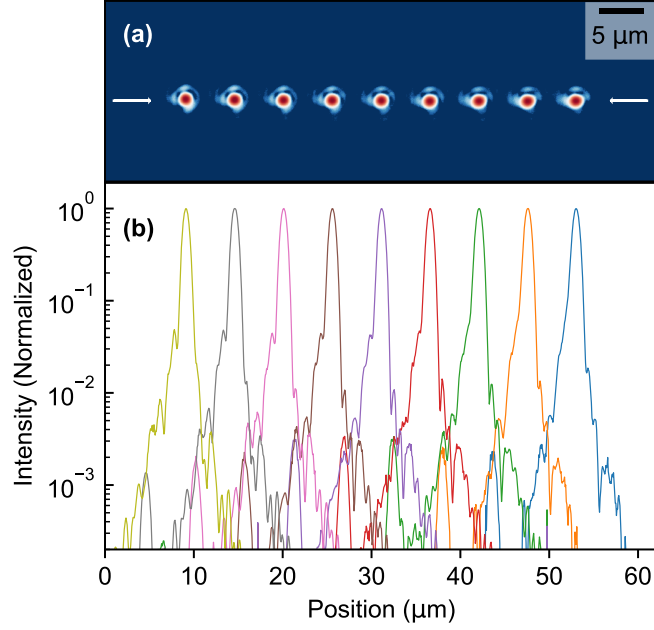


图 6.6 (a) AOD 在离子平面形成的衍射 IA 光斑阵列图像。相邻 IA 光斑间距对应离子间距。(b) 截线上 IA 光斑的强度剖面。光斑形状偏离高斯分布主要源于自制物镜引入的像差^[16]。

为验证光学构型的对称性，首先精细调整两只 AOD 的衍射光斑与离子位置的重合。在基于 AOD 的 IA 系统中，AOD 的每一条特定衍射光束对应其所寻址的离子。我们首先在阱中囚禁两个离子，分别记为离子 A 与离子 B。调节光学后，扫描 AOD 的驱动频率，使衍射 IA 光斑沿离子链方向移动。在该实验中，拉曼操作激光的功率与作用时间均保持不变，因此离子被驱动到 $|1\rangle$ 态的概率取决于扫描光斑与离子位置的重叠面积。实验得到的高斯分布曲线如图 6.7 所示。并使用如下函数对数据进行拟合：

$$A(x) = \sum_i A_i \exp \left[-2 \left(\frac{x - x_i}{w_i} \right)^2 \right], \quad (6.3)$$

其中 i 表示离子 A 或离子 B， A_i 为最大激发概率， w_i 为每个 IA 光斑的束腰， x_i 为 IA 光斑中心位置，而 x 为扫描光斑的位置参数。位置参数已换算为 AOD 的驱动频率。由拟合得到离子 A 与离子 B 的中心频率分别为 77.079(4) MHz 与 78.027(4) MHz。考虑到离子 A 与离子 B 的间距约为 $5.5 \mu\text{m}$ ，可计算 ArmL 与 ArmR 两臂的 IA 光斑束腰分别为 $1.15(3) \mu\text{m}$ 与 $0.93(3) \mu\text{m}$ ，与理论衍射极限 ($0.81 \mu\text{m}$) 接近。扫描结果进一步确认了光学构型的对称性：具有相同频移的两臂衍射 IA 光斑照射同一离子。

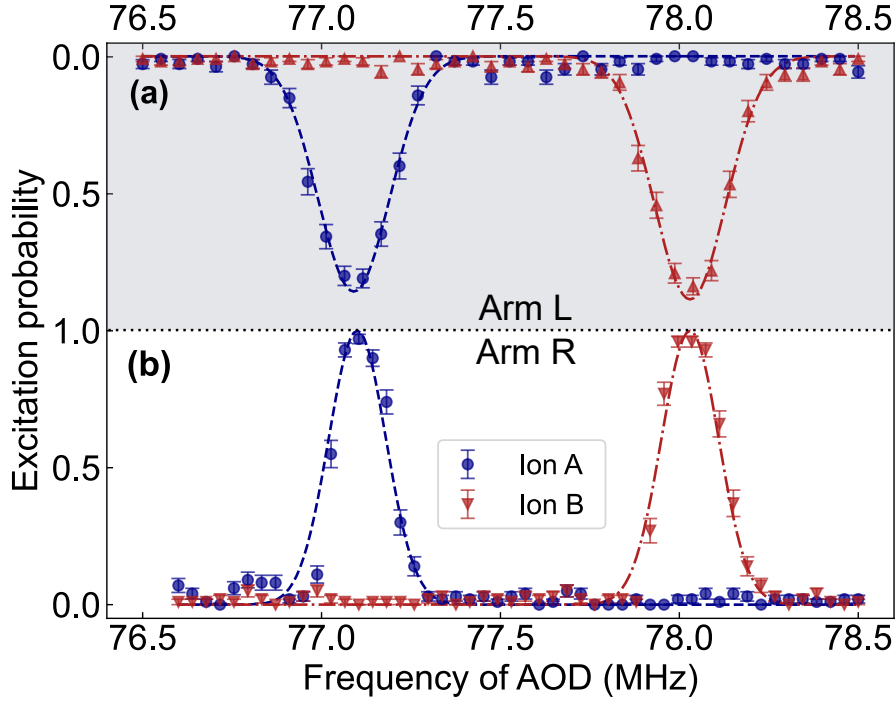


图 6.7 扫描 IA 光斑沿离子链移动时，离子 A 与离子 B 的激发概率。对于 ArmL (a) 与 ArmR (b)，分别扫描 AOD 的驱动频率，使 IA 光斑位置跨越两离子。虚线为对相应通道数据进行的高斯拟合。所有误差棒为 68% 置信区间（基于高斯分布）^[16]。

6.1.3 Raman 寻址光路串扰表征与分析

通过对离子 A 或离子 B 进行单独寻址时，测量另一个离子的 Rabi 频率可以表征系统操作串扰水平。将 AOD 的驱动频率分别设置为对应离子 A 或离子 B 的频率，即 77.08 MHz 与 78.03 MHz。为消除脉冲上升与下降沿导致的非期望拉比驱动（其机理为：脉冲的频率带宽经 AOD 转换为空间展开），先开启 AOD 持续 $2\ \mu\text{s}$ 进行预准备，随后再打开 AOM 使激光通过调制器并作用于离子。离子 A 与离子 B 的 Rabi 振荡随相互作用时间的变化如图 6.8 所示。每个数据点均为 40000 次重复测量的平均值。

对于目标离子，离子 A 与离子 B 的 Rabi 频率分别拟合得到 $2\pi \times 74.14\ \text{kHz}$ 与 $2\pi \times 84.13\ \text{kHz}$ ，如图 6.8(a) 与图 6.8(c) 所示。对于旁观离子，MC-PMT 记录到的激发概率主要由三部分贡献：MC-PMT 引入的态探测串扰误差、单比特态制备与测量（state preparation and measurement, SPAM）误差，以及由 IA 串扰驱动的 Rabi 振荡（本文关注的主要部分）。为准确确定 IA 串扰，需要仔细分析旁观离子激发概率的理论模型，并从中提取光学寻址串扰项。

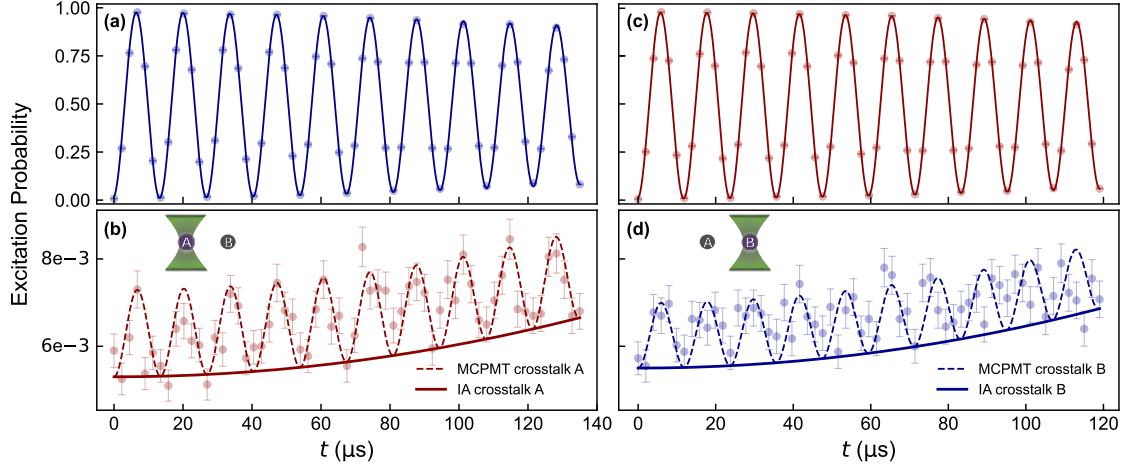


图 6.8 初始在阱中囚禁两离子 A 与 B。当以离子 A 为目标单独寻址时，其 Rabi 振荡如 (a) 所示，拟合得到离子 A 的 Rabi 频率为 $2\pi \times 74.14$ kHz。同时探测离子 B，结果如 (b) 所示。离子 B 的激发概率主要由三部分贡献：MC-PMT 引入的态探测串扰误差、单比特 SPAM 误差，以及由 IA 串扰驱动的 Rabi 振荡（详见附录 A）。虚线为 IA 串扰、SPAM 误差与 MC-PMT 串扰之和，其振荡与目标离子 A 同步；实线为 IA 串扰与 SPAM 误差之和。由式 (6.4) 拟合得到离子 B 的 Rabi 频率为 $2\pi \times 88(4)$ Hz。(c)、(d) 对应以离子 B 为目标离子、离子 A 为旁观离子的情况，其 Rabi 频率分别为 $2\pi \times 84.13$ kHz 与 $2\pi \times 100(6)$ Hz。所有误差棒为 68% 置信区间（基于高斯分布）^[112]。

在持续时间为 t 的 Rabi 振荡操作之后，理想情况下探测激光将使旁观离子与目标离子以概率 $P(|i\rangle|j\rangle, t) = P_S(t)P_T(t)$ 塌缩到态 $|i\rangle \otimes |j\rangle$ 上。其中 $i = (0, 1)$ 分别表示（暗态、亮态）， j 同理，并且

$$P_{S/T}(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_{S/T}t)],$$

其中 $\Omega_{S/T}$ 分别表示旁观离子与目标离子的 Rabi 频率。然而，在给定 $|S\rangle \otimes |T\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$ 的条件下，旁观离子最终读出为 $|1\rangle$ 的概率（记为 $P(S = |1\rangle | |i\rangle|j\rangle)$ ）将更为复杂。

当 MC-PMT 相应通道收集到来自旁观离子自身散射的光子，或由 MC-PMT 串扰引入的溢出光子时，旁观离子会被判定为处于 $|1\rangle$ 态。若目标离子处于 $|0\rangle$ 态，溢出光子数可以忽略，此时旁观离子仅受 SPAM 误差影响：当 $|S\rangle = |0\rangle$ 时，旁观离子被读出为 $|1\rangle$ 的概率为 ϵ_{01} ；当 $|S\rangle = |1\rangle$ 时读出为 $|1\rangle$ 的概率为 $1 - \epsilon_{10}$ 。

若目标离子处于 $|1\rangle$ 态，我们沿用前述章节中的 SPAM 误差符号 ϵ_{01} 和 ϵ_{10} ，并额外引入 MC-PMT 串扰参数 ϵ_{MP} ，其定义为仅由溢出光子即可导致旁观离子被读出为 $|1\rangle$ 的概率。此时，当 $|S\rangle = |0\rangle$ 时旁观离子读出为 $|1\rangle$ 的概率为 $1 - (1 - \epsilon_{01})(1 - \epsilon_{MP})$ ；当 $|S\rangle = |1\rangle$ 时为 $1 - \epsilon_{10}(1 - \epsilon_{MP})$ 。上述结果汇总于表 6.2。

因此，通过对所有情形求和可得：

$$\begin{aligned}
 P(S = |1\rangle, t) &= \sum_{i,j} P(S = |1\rangle | |i\rangle|j\rangle) P(|i\rangle|j\rangle, t) \\
 &\approx \underbrace{\frac{\epsilon_{MP}}{2} [1 + \cos(\Omega_S t)] \times \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_T t)]}_{\text{项 1}} \\
 &\quad + \underbrace{[1 - (\epsilon_{01} + \epsilon_{10})] \times \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_S t)]}_{\text{项 2}} + \epsilon_{01}. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

实验测得的总串扰由三项组成：项 1 对应 MC-PMT 引入的态探测串扰误差，其表现为与目标离子同步的快速振荡；项 2 对应由 IA 串扰驱动的 Rabi 振荡；最后一项 SPAM 误差项 ϵ_{01} 则会将整体激发概率曲线抬升到某一基线。

表 6.2 双离子读出条件概率

$ S\rangle \otimes T\rangle$	$P(i\rangle j\rangle, t)$	$P(S = 1\rangle i\rangle j\rangle)$
$ 0\rangle \otimes 0\rangle$	$[1 - P_S(t)][1 - P_T(t)]$	ϵ_{01}
$ 0\rangle \otimes 1\rangle$	$[1 - P_S(t)]P_T(t)$	$1 - (1 - \epsilon_{01})(1 - \epsilon_{MP})$
$ 1\rangle \otimes 0\rangle$	$P_S(t)[1 - P_T(t)]$	$1 - \epsilon_{10}$
$ 1\rangle \otimes 1\rangle$	$P_S(t)P_T(t)$	$1 - \epsilon_{10}(1 - \epsilon_{MP})$

于是，通过式 6.4 对数据进行拟合后，得到旁观离子 A 与旁观离子 B 的 Rabi 频率分别为 $2\pi \times 88(4)$ Hz 与 $2\pi \times 100(6)$ Hz，如图 6.8(b) 与图 6.8(d) 所示。因此，离子 A 与离子 B 的 Rabi 频率串扰分别为 $1.19(5) \times 10^{-3}$ 与 $1.19(7) \times 10^{-3}$ 。

需要说明的是，以上结果对应单个离子的寻址情况。当同时将光斑寻址多个离子（例如执行两比特门）时，输入 AOD 射频信号中的多音频会引入互调失真（intermodulation distortion, IMD），从而产生额外串扰。抑制 IMD 的一种简单方法是降低加在射频放大器上的输入信号功率。

为了表征该项，在实验中，向射频放大器输入两个音频 77.09 MHz 与 78.03 MHz，并分别在输入功率为 0 dBm 与 -5 dBm 时测量输出频谱，如图 6.9 所示。降低输入功率后，三阶 IMD 分量的功率比期望音频低约 30 dB。随后将该射频信号施加到 AOD 上，并测量衍射光斑的强度分布，如图 6.10 所示。由三阶 IMD 产生的光斑 A 与 D 的强度分别为 -31.5 dBc 与 -31.8 dBc。由此可推得 IMD 引起的串扰分别为 7.07×10^{-4} 与 6.61×10^{-4} ，与 0.1% 水平的 IA 串扰相当。所以，进一步抑制 IMD（例如使用三阶截点更高的射频放大器），有利于抑制多离子比特线路的 IA 串扰。

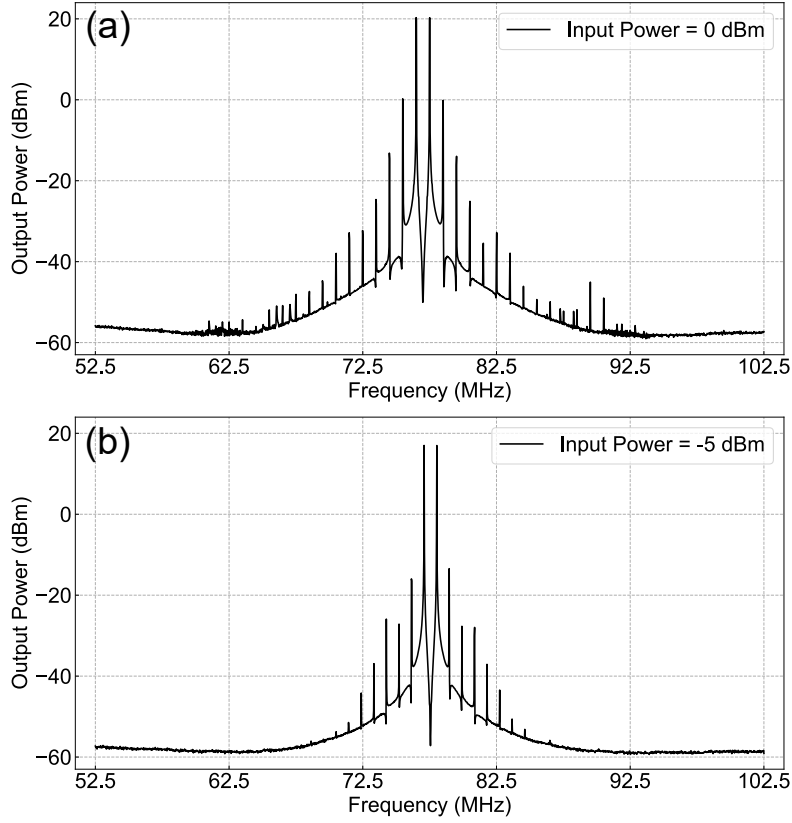


图 6.9 当输入功率为 0 dBm (a) 与 -5 dBm (b) 时, 射频放大器的输出频谱^[16]。

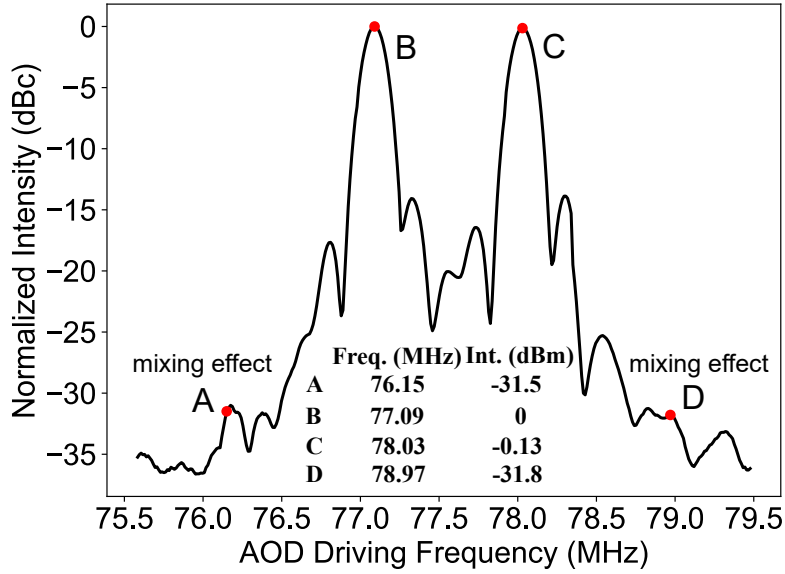


图 6.10 当输入功率为 -5 dBm 时, AOD 衍射光斑的强度分布。光斑 B 与 C 对应两个期望的驱动音频, 光斑 A 与 D 对应两个三阶 IMD 音频。内嵌表给出了各光斑的频率与强度^[16]。

综上, 本工作提出并建设了基于对称配置 AOD 的低串扰双侧寻址系统。AOD 使寻址光束能够灵活地与各离子位置对准, 借助双侧对称构型实现了约 0.1% 水平的离子间串扰, 与光斑强度溢出串扰一致。进一步降低串扰可通过改进自制物镜或

采用更高 NA 的物镜（例如 $0.66 \text{ NA}^{[51]}$ ）实现。此外，若利用空间光调制器对离子阱光学系统的像差进行校正^[124-126]，则有望将 IA 串扰进一步降低至 $< 1.0 \times 10^{-4}$ 。值得指出的是，大规模量子模拟已在二维离子晶体上成功实现^[34]。本方法还提供了向量子计算扩展的潜力：在两侧均将一维 AOD 替换为二维 AOD，即可实现对二维离子晶体的二维寻址。

6.2 离子声子模式表征实验

完成 Raman 系统搭建并实现离子内态的 Raman Rabi 操控之后，下一步是对与两比特门直接相关的声子自由度进行实验表征。本节利用同一套 Raman 系统，测量离子链径向声子模式的频率、平均热占据、加热率与相干时间，为后续 MS 门的失谐选择与误差预算提供直接输入。

6.2.1 声子谱激发

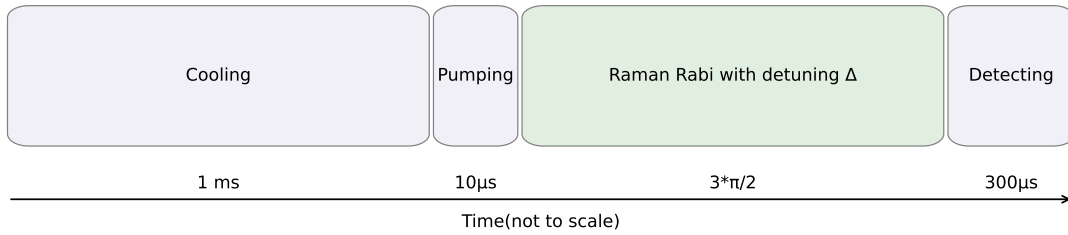


图 6.11 边带谱测量的实验时序示意（时间不按比例）。冷却阶段（约 1 ms）包含多普勒冷却与 EIT 冷却，用于将离子运动态制备到接近基态；随后通过约 $10 \mu\text{s}$ 的光学抽运将内态初始化到 $|0\rangle$ ；接着对选定离子施加双光子失谐为 Δ 的 Raman 脉冲（固定脉冲面积约为 $3\pi/2$ ），并扫描 Δ 以激发红/蓝一阶边带；最后在约 $300 \mu\text{s}$ 的态依赖荧光探测窗口内读取激发概率。

在实现单离子 Raman Rabi 相干操控之后，我们进一步利用同一套 Raman 系统对离子链的外态（声子模式）进行表征。边带谱测量能够给出 7 离子线性链在选定方向上的各集体正常模频率 $\{\omega_k\}$ ，为后续两比特 Mølmer-Sørensen (MS) 门的双频失谐选取与调制波形设计提供频率标定；同时，结合红/蓝边带的不对称性，还可对 EIT 冷却后的平均声子数 $\bar{n}_k$ 进行定标，从而评估运动冷却效果。

实验时序如图 6.11 所示。对每个扫描频点，首先对离子链进行冷却并将内态抽运到 $|0\rangle$ ；随后调节驱动声光器件的频率以改变 Raman 拍频，从而扫描双光子失谐 Δ 。根据第 5.1.4 节的原理介绍，在 Lamb-Dicke 区域内，Raman 相互作用中的动量传递项 $e^{i\Delta\vec{k}\cdot\hat{x}}$ 可在一阶近似下展开为 $1 + i \sum_k \eta_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$ ，因此除载波共振 ($\Delta \simeq 0$) 外，还会在 $\Delta \simeq \pm\omega_k$ 处出现一阶边带共振：蓝边带对应 $|0, n\rangle \rightarrow |1, n+1\rangle$ ，红边带对应 $|0, n\rangle \rightarrow |1, n-1\rangle$ 。在固定 Raman 脉冲作用时间下记录 $|1\rangle$ 的占据概率

随 Δ 的变化，即得到对应的边带谱线。

需要注意的是，第 k 个声子模式在不同离子上的参与系数（本征矢分量）并不相同。当某些模式在特定离子处接近节点时，谱峰会显著减弱甚至不可分辨。为保证获得完整的 7 模谱信息，我们对离子链（编号 0 ~ 6）中的 1 号与 2 号离子分别进行单离子寻址的边带谱扫描，结果如图 6.12 和图 6.13 所示。可以看到，不同离子处各谱峰高度差异明显，反映了各声子模式在链中的空间分布差别；通过两次扫描可覆盖全部模式频率。

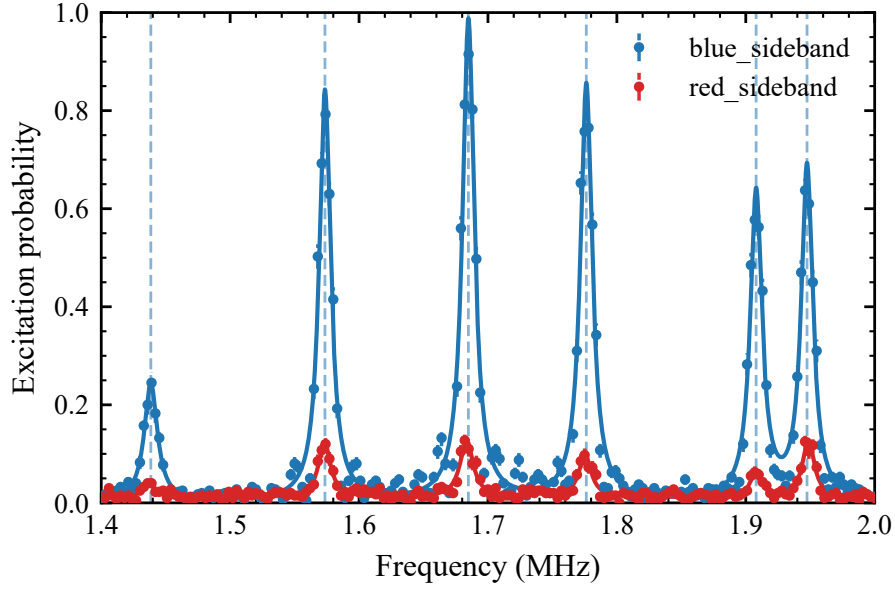


图 6.12 1 号离子边带谱扫描结果。横坐标为扫描的边带频率（等效为 Raman 双光子失谐的绝对值 $|\Delta|/2\pi$ ，单位 MHz），纵坐标为固定 Raman 脉冲后测得的激发概率。蓝色与红色散点分别对应蓝边带（BSB）与红边带（RSB）数据；实线为多峰拟合结果，竖虚线标示拟合得到的各声子模式中心频率。误差棒表示由重复测量得到的 68% 置信区间。

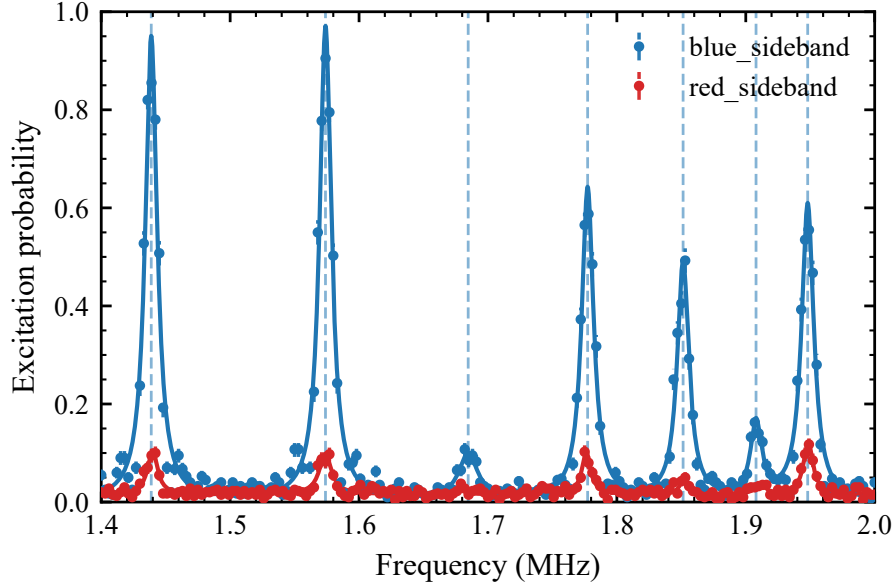


图 6.13 2 号离子边带谱扫描结果。图例与坐标定义同图 6.12。

在获得各模式中心频率后，我们进一步利用式 (5.54) 对 EIT 冷却后的平均声子数进行估计。该方法基于弱激发近似下红、蓝一阶边带跃迁强度之比满足 $P_{\text{rsb}}/P_{\text{bsb}} \approx \bar{n}/(\bar{n} + 1)$ 的关系：当 $\bar{n} \ll 1$ 时红边带被显著抑制，因此谱线不对称性可直接反映各模式的热布居。实际数据处理中，我们对每个模式选取蓝边带峰值更高的一组边带谱数据用于计算，以降低由小耦合导致的拟合不确定度。由此得到的各模式频率与声子数整理在表 6.3。

从表 6.3 可见，所有径向模式的 $\bar{n}_k$ 均不超过 0.21，表明 EIT 冷却已将运动态制备到接近基态的区域。这为后续 MS 门实验中降低热噪声引入的失配误差、并实现稳定的自旋-运动耦合提供了必要条件。

6.2.2 声子加热率与相干时间表征

在上一节完成径向声子谱测量并得到各正常模的中心频率 $\{\omega_k\}$ 与 EIT 冷却后的平均声子数 $\{\bar{n}_k\}$ 后，本节进一步对各径向模式的声子加热率与相干时间进行实验表征。加热率 $\dot{\bar{n}}_k$ 描述离子在空闲演化过程中平均声子数的增长速度；相干时间 $T_{2,k}^*$ 则刻画模式相位噪声导致的干涉对比度衰减。二者均是评估离子操作水平的关键指标。

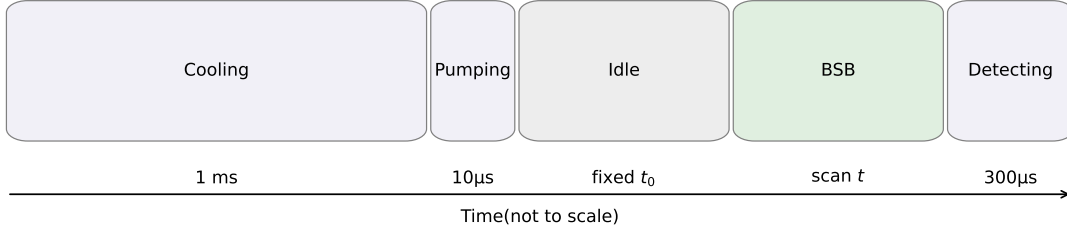


图 6.14 声子加热率测量单次实验的时序示意（时间不按比例）。冷却阶段（约 1 ms）包含 Doppler 冷却与 EIT 冷却，先将离子制备初始化到 $|0\rangle$ ；接着保持空闲等待时间 t_0 (Idle)，在无 Raman 驱动条件下让声子模式在背景噪声作用下自然加热；随后将 Raman 双光子失谐切换到目标模式的一阶蓝边带，并扫描边带脉冲持续时间 t 以记录 Rabi 振荡。对不同 t_0 重复该序列并提取 $\bar{n}_k(t_0)$ ，即可获得加热率 $\dot{\bar{n}}_k$ 。

声子加热率测量流程如图 6.14 所示。实验中，对每一个等待时间 t_0 ，分别测量蓝边带 (BSB) 与红边带 (RSB) 的 Rabi 振荡曲线，并采用第 5 章给出的热态边带 Rabi 模型进行拟合，从而得到对应的平均声子数 $\bar{n}_k(t_0)$ 。

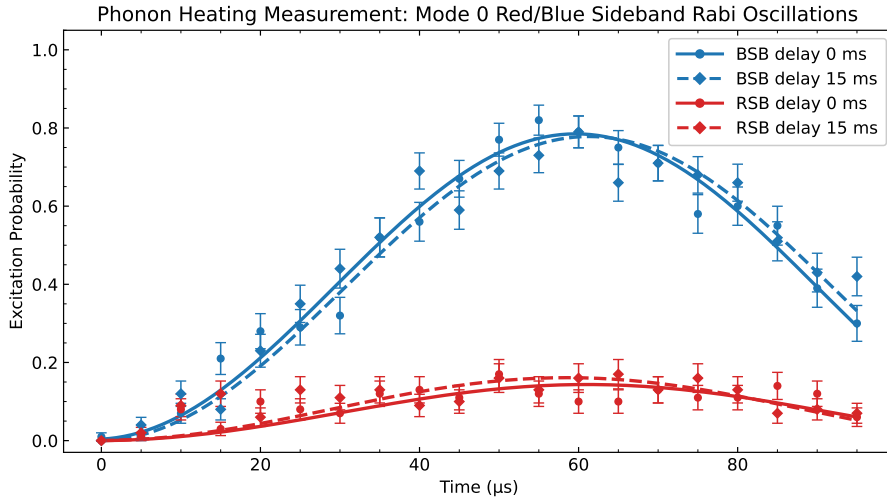


图 6.15 最高频率径向声子模式的加热率测量结果（对应表 6.3 中 Mode 7）。横轴为边带 Raman 脉冲持续时间 t ，纵轴为测得的内态激发概率。蓝边带 (BSB) 与红边带 (RSB) 数据分别在等待时间 $t_0 = 0$ ms 与 15 ms 后测得。error bar 为由重复测量得到的 68% 置信区间。

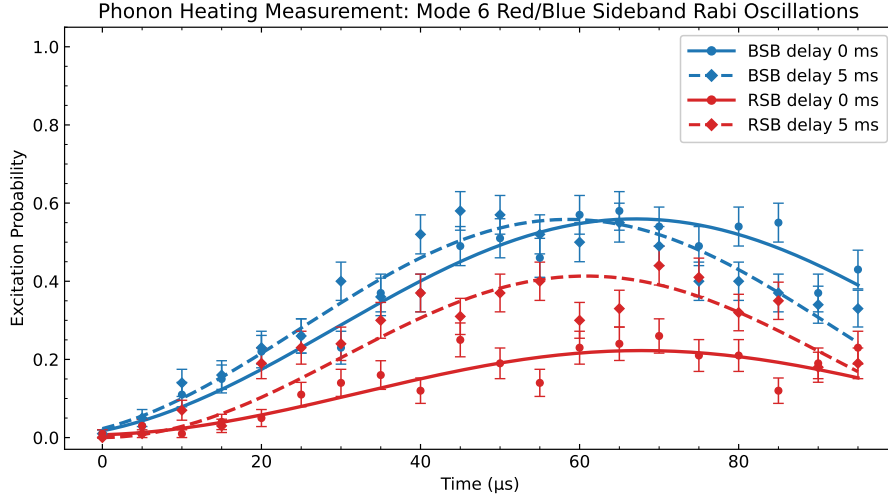


图 6.16 最低频率径向声子模式的加热率测量结果（对应表 6.3 中 Mode 1）。图中给出了等待时间 $t_0 = 0$ ms 与 5 ms 下的 BSB/RSB Rabi 振荡及联合拟合曲线。error bar 为 68% 置信区间。

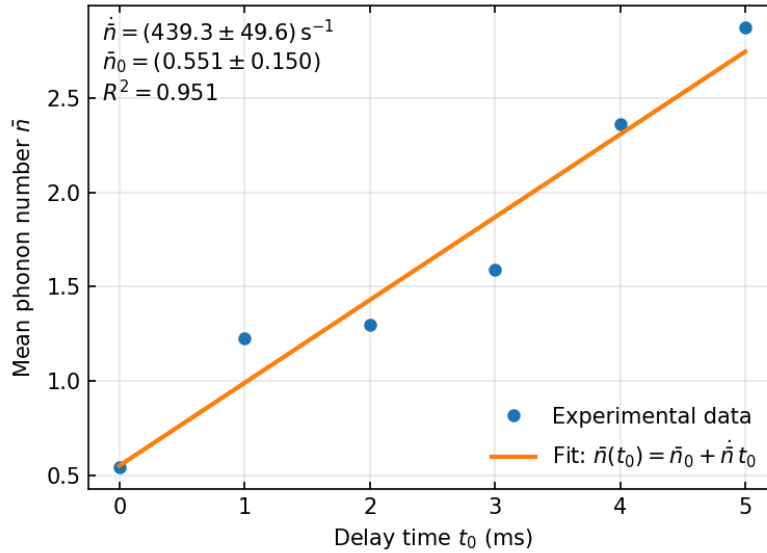


图 6.17 7 离子链 COM 模加热率测量的线性拟合结果。横坐标为等待时间 t_0 ，纵坐标为由边带振荡联合拟合得到的平均声子数 $\bar{n}(t_0)$ ；斜率对应模式加热率。

对比图 6.15 与图 6.16 中不同等待时间下的 BSB / RSB 拟合结果可以看到，随着脉冲间等待时间的增加，运动热占据上升会系统性改变边带振荡包络与对比度，从而体现为提取得到的 $\bar{n}_k$ 增大。随后对 $\bar{n}_k$ 随等待时间的增长关系进行线性计算（注意，由于不同正常模在离子链中具有不同的参与系数（本征矢分量），若选取的离子位于某一模式的近节点位置，则边带耦合会显著减弱并增大拟合不确定度。为此，本节对每个模式均选择参与系数较大的离子进行单离子寻址测量，以提高 $\bar{n}_k$ 拟合与加热率回归的鲁棒性。）：

$$\bar{n}_k(t_0) = \bar{n}_{k,0} + \dot{\bar{n}}_k t_0, \quad (6.5)$$

其中 $\bar{n}_{k,0}$ 表示冷却结束时 ($t_0 = 0$) 的初始平均声子数, 斜率 $\dot{n}_k$ 即为该模式的加热率 (单位: quanta/s)。图 6.17 为 COM 模的加热率测量拟合结果。

除加热率外, 本节还采用边带 Ramsey 序列对各模式的声子相干时间进行测量。该方法与第 4 章微波 Ramsey 实验 (图 4.29) 在时序结构上类似: 将两次 $\pi/2$ 微波脉冲替换为共振于目标模式蓝边带的 $\pi/2$ Raman 脉冲, 使系统在 $\{|0, n\rangle, |1, n+1\rangle\}$ 子空间内形成相干叠加并在自由演化时间 τ 内积累相位, 随后通过第二个 $\pi/2$ 脉冲将相位信息映射回内态布居。通过扫描 τ (或等效扫描分析脉冲相位) 获得 Ramsey 条纹, 并对条纹对比度包络进行拟合 (其包络形式与第 3 章 Ramsey 对比度衰减模型相同), 即可提取该声子模式的有效相干时间 $T_{2,k}^*$ 。

表 6.3 7 离子链径向声子模式实验表征结果汇总表。 ω_k 为边带谱测得的第 k 个径向正常模频率, $\bar{n}_k$ 为 EIT 冷却后 ($t_0 = 0$) 的平均声子数; 加热率 $\dot{n}_k$ 由 $\bar{n}_k(t_0)$ 对等待时间 t_0 的线性拟合得到; 相干时间 $T_{2,k}^*$ 由蓝边带 Ramsey 条纹对比度衰减拟合获得。表中 “< 5” 表示在实验可达的等待时间范围内未分辨出加热过程, 故给出上限; “> 200” 表示在 200 ms 的扫描窗口内未观测到显著衰减, 故给出下限。

Mode k	$\omega_k/2\pi$ (MHz)	$\bar{n}_k$	加热率 $\dot{n}_k$ (quanta/s)	相干时间 $T_{2,k}^*$ (ms)
1	1.439	0.11	< 5	89.5
2	1.574	0.09	< 5	137.7
3	1.680	0.14	< 5	199.1
4	1.777	0.11	6	> 200
5	1.851	0.08	< 5	> 200
6	1.908	0.09	< 5	> 200
7	1.948	0.21	439.3	9.4

噪声同样往往以“共模”方式作用于整条链, 所以使径向最高频模式 (COM 模) 的加热率更高、相位积累最直接、退相干更快^[108]。从表 6.3 可见, 除最高频率模式 (COM 模) 外, 其余径向模式在本阱条件下均表现出较低的加热率以及百毫秒量级的声子相干时间。这表明本系统已能够提供低噪声的声子-自旋耦合与稳定的 Raman 操作环境。在后续两比特 MS 门参数选取中, 将优先采用加热率更低且相干时间更长的径向模式作为运动耦合模式, 以减小门期间的退相干误差。

6.3 量子门实现与随机基准 (RB) 实验表征

本节采用随机基准测试 (randomized benchmarking, RB) 及其两比特扩展形式 character randomized benchmarking (CRB) 来定量表征门保真度。与基于单次态保真度估计相比, RB/CRB 的主要优势在于:

1. **表征完整性:** RB 是对某一通用门集合（如 Clifford 门集合）的表征，更能反映量子线路真实执行时的保真度水平。
2. **SPAM 鲁棒性:** RB 拟合模型中的幅度项与偏置项（通常记为 A, B ）吸收了制备与测量误差，使得衰减常数主要反映门操作噪声^[113,127]。
3. **“计算相关”误差:** 随机长序列可检验误差在长计算中的累积行为，对门误差的漂移/相关性具有一定敏感度^[128]。

与量子过程层析相比，RB 的实验开销随序列数和序列长度多项式增长，更适合多比特系统的常规标定^[116]。

关于误差棒的统一说明: 除特别说明外，本节 RB/CRB 图中误差棒表示 68% 置信区间；平均点的不确定度取不同随机序列之间的标准误；衰减参数 p 或 α_i 的不确定度来源于拟合协方差矩阵。

在标准 RB 中，随机门通常从 Clifford 群（或其近似 2-design）中均匀抽样。Clifford 随机化在平均意义下将一般噪声“twirling”成等效的去极化（depolarizing）噪声，从而得到单指数衰减的序列保真度模型^[113,129]：

$$P(m) = A p^m + B, \quad (6.6)$$

其中 m 为序列长度（例如 Clifford 数或某类原生门数）， $P(m)$ 为测得的（survival probability）， $p \in [0, 1]$ 为 RB 衰减参数（与平均误差率直接相关）， A 与 B 则由 SPAM、读出基矢选择以及数据处理方式决定。对于维度为 d 的系统（ n 比特时 $d = 2^n$ ），若将噪声等效为去极化通道，其平均门保真度 F_{avg} 与 p 的关系为^[113,127]：

$$F_{\text{avg}} = \frac{(d-1)p+1}{d}, \quad r \equiv 1 - F_{\text{avg}}. \quad (6.7)$$

因此单比特（ $d = 2$ ）时 $F_{\text{avg}} = (1+p)/2$ ；两比特（ $d = 4$ ）时 $F_{\text{avg}} = (3p+1)/4$ 。

6.3.1 单比特门随机基准测试

线路协议与序列生成流程：

本论文的单比特 RB 采用标准 Clifford RB 协议^[113,127-128]。其实验流程可概括为：

1. **选择序列长度集合:** 选取一组 Clifford 数 $m \in \{m_1, m_2, \dots\}$ 。
2. **随机采样 Clifford 序列:** 对每个 m ，从单比特 Clifford 群 $\mathcal{C}_1$ 中独立均匀抽样得到随机序列 $C_1, C_2, \dots, C_m$ 。
3. **计算恢复门:** 计算恢复门（inversion/recovery gate）：

$$C_{m+1} = (C_m C_{m-1} \dots C_1)^{-1}, \quad (6.8)$$

使得理想情况下整段序列作用为恒等，从而将量子态带回到已知目标态（本实验为 $|0\rangle$ ）。

4. **编译到物理门集:** 将每个 Clifford 门分解为实验可实现的物理脉冲序列。

5. **重复测量与统计：**对同一随机序列重复执行多次 (shots)，统计终态被测得为目标态的频率，得到该序列在长度 m 下的存活概率；对同一 m 的多条随机序列取平均得到 $\bar{P}(m)$ 。

6. **指数拟合并提取 p ：**用式 (6.6) 拟合 $\bar{P}(m)$ ，得到衰减参数 p ；进一步用式 (6.7) 换算平均 Clifford 门保真度。

(1) 微波驱动单比特门 RB 结果与讨论：

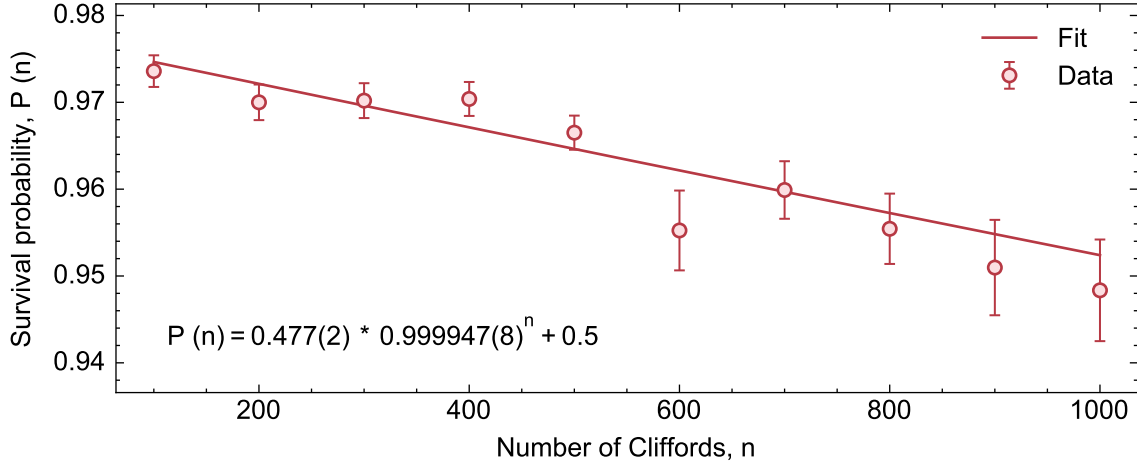


图 6.18 微波驱动单比特 Clifford RB 结果。蓝色散点为不同随机序列平均存活概率的测量结果，虚线为指数拟合。图中误差棒对应固定序列长度下存活概率估计的 68% 置信区间；平均点的不确定度取不同随机序列之间的标准误。

图 6.18 给出了微波 (MW) 驱动的单比特 Clifford RB 结果，曲线拟合结果为：

$$P(n) = 0.477(2) \times 0.999947(8)^n + 0.5, \quad (6.9)$$

其中 n 为 Clifford 数。偏置项 0.5 对应于单比特在完全去极化极限下测得目标态的概率，而指数项刻画门误差随序列长度的累积。由于微波操作时间远短于其相干时间，本节忽略退相干对拟合模型的修正。由拟合得到 $p_{\text{MW}} = 0.999947(8)$ ，代入式 (6.7) ($d = 2$) 可得平均 Clifford 门保真度：

$$F_{\text{avg}}^{\text{MW}} = \frac{1 + p_{\text{MW}}}{2} = 0.999974(4), \quad (6.10)$$

(2) Raman 激光驱动单比特门 RB 结果与讨论：

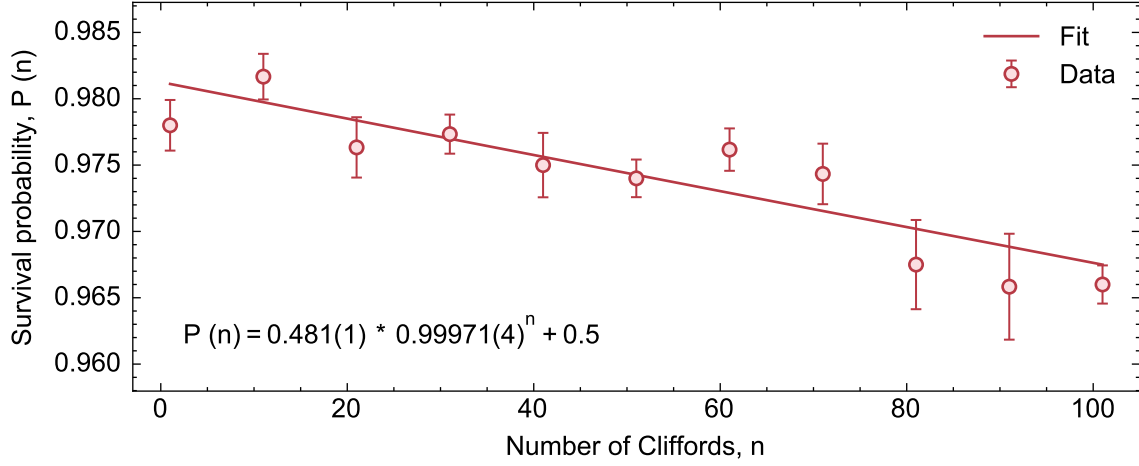


图 6.19 Raman 激光驱动单比特 Clifford RB 结果。蓝色圆点为不同随机序列的平均存活概率，虚线为指数拟合。图中误差棒对应固定序列长度下存活概率估计的 68% 置信区间；平均点的不确定度取不同随机序列之间的标准误。

图 6.19 给出了 Raman 激光驱动的单比特 RB 结果，曲线拟合结果为：

$$P(n) = 0.481(1) \times 0.99971(4)^n + 0.5000, \quad (6.11)$$

其中 n 为 Clifford 数。由此得到 $p_{\text{Raman}} = 0.99971(4)$ ，对应平均 Clifford 门保真度：

$$F_{\text{avg}}^{\text{Raman}} = \frac{1 + p_{\text{Raman}}}{2} = 0.99986(2), \quad (6.12)$$

相比微波驱动结果，Raman 操作的保真度更低，这是由于 Raman 操作会额外引入光场相位噪声、光强波动以及 AC Stark shift 漂移补偿误差等因素。但需要强调的是，在本系统中只有 Raman 驱动同时具备声子边带耦合（实现两比特门）和个体寻址能力，因此 Raman 单比特门才是后续量子线路中的原生单比特操作；而该保真度已达到较高水平。

进一步在 7 离子中间的 5 比特离子链上对任意离子对重复上述流程，所得单比特门保真度分布在 99.966(4)% ~ 99.986(2)%，详见表 6.4。

表 6.4 7 离子链中间 5 离子比特的单比特随机基准测试结果，平均 Clifford 保真度按 $F_{\text{avg}} = (1 + p)/2$ 计算。

量子比特	RB 衰减参数 p	平均 Clifford 保真度
q_1	0.99953(9)	99.976(4)%
q_2	0.9994(1)	99.972(5)%
q_3	0.99971(4)	99.986(2)%
q_4	0.99961(9)	99.980(4)%
q_5	0.99931(9)	99.966(4)%

6.3.2 两比特 MS 门实验结果

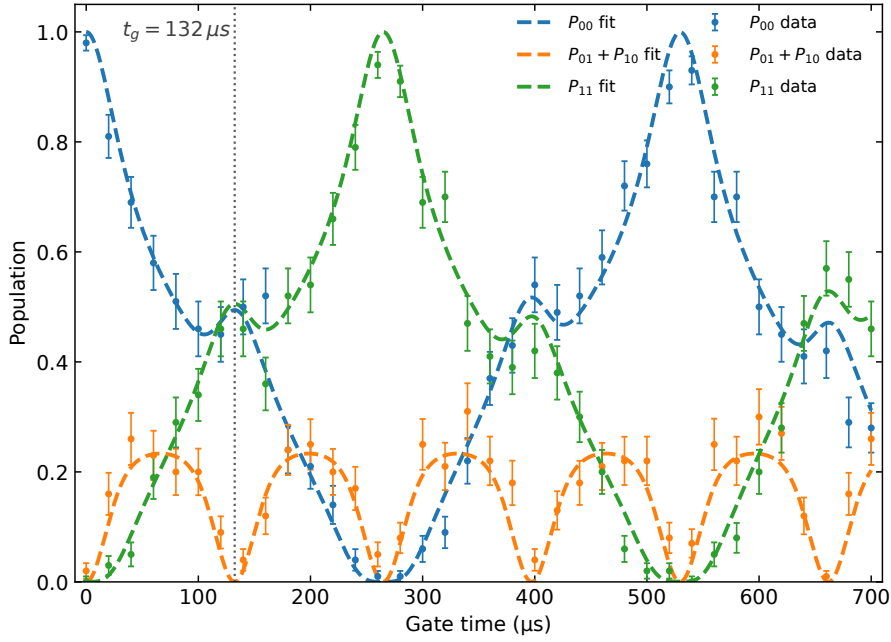


图 6.20 扫描 MS 门作用时间的实验结果。通过调节门脉冲持续时间，记录目标 Bell 态相关偶宇称布居的变化，用于确定满足目标几何相位积累条件的工作点。虚线为按照离子阱中标准的单模、热初态 Mølmer-Sørensen (MS) 门布局演化模型拟合^[98]。误差棒对应 68% 置信区间。

按照前述原理，对两离子同时施加红、蓝边带双频 Raman 脉冲，并选取满足目标几何相位积累与相空间闭合条件的 MS 门参数。由图 6.20，根据拟合结果得计算基下的偶宇称布居 $P_{00} + P_{11} \approx 0.97(4)$ 。

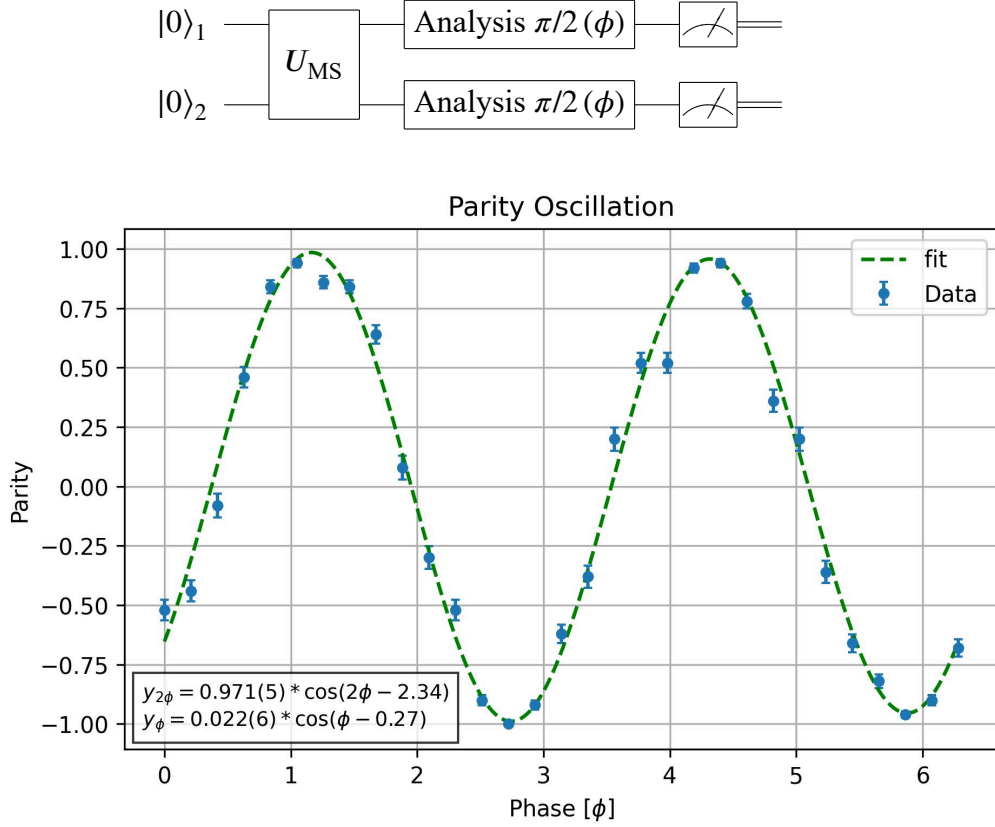


图 6.21 MS 门宇称振荡 (parity oscillation) 的实验流程与测量结果。上图为实验流程示意图：两比特首先经过 MS 门操作，随后施加相位为 ϕ 的 $\pi/2$ 分析脉冲，并在计算基下测量；下图为扫描分析脉冲相位得到的宇称振荡结果，其拟合参照 (5.120)，函数为 $\Pi_{\text{obs}}(\phi) = A_1 \cos(\phi + \phi_1) + A_2 \cos(2\phi + \phi_2)$ 。误差棒对应 68% 置信区间。

进一步进行宇称振荡测量后，由图 6.21，得到宇称振荡振幅 $C \approx 0.971(5)$ 。下文的 Bell 态保真度均按式 (5.76) 以振幅 C 代入。根据式 (5.76)，可得未经读出修正时的 Bell 态保真度：

$$F = \frac{P_{00} + P_{11} + C}{2} \simeq \frac{0.97(4) + 0.971(5)}{2} \simeq 0.97(2).$$

考虑到本系统单比特 SPAM 误差处于 10^{-2} 量级，结合式 (5.128) 可知，上述未经修正的保真度已明显受到读出误差限制。

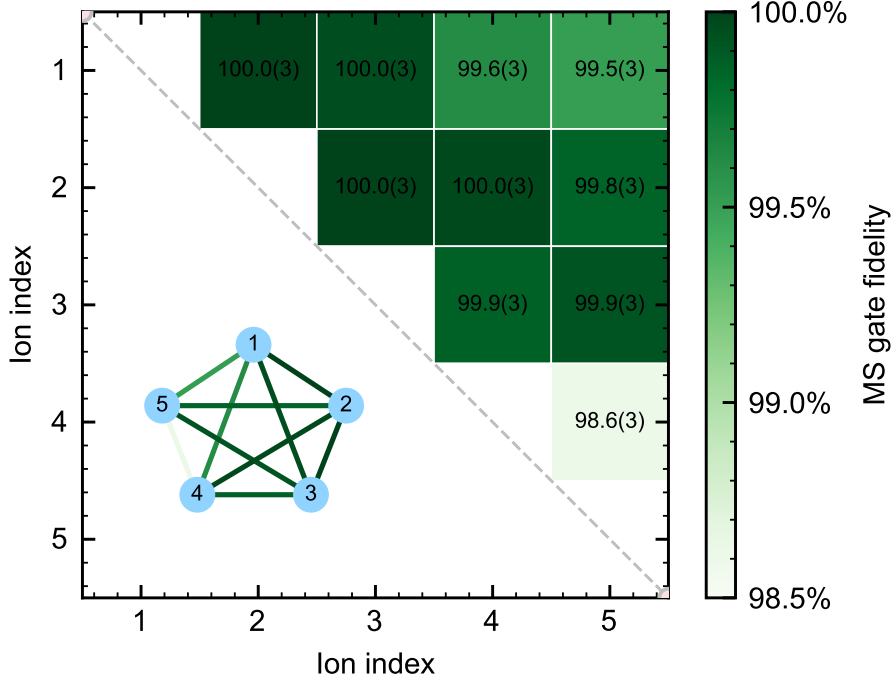


图 6.22 5 比特子系统中全连通 MS 门的保真度矩阵。横坐标和纵坐标为离子比特的编码序号；矩阵元素 (i, j) 给出对应离子对的 MS 门 Bell 态保真度，左下角示意图表示该 5 比特子系统的全连通门图。

进一步在 5 比特子系统中对所有离子对重复上述流程，并通过最大似然估计法消除态读出误差后，所得 MS 门 Bell 态保真度分布在 98.6(3)% ~ 100.0(3)%（见图 6.22）。

6.3.3 两比特 MS 门随机基准测试

两比特 CRB 的基本思路：

两比特纠缠门（如离子阱中的 Mølmer-Sørensen, MS 门）通常是量子线路误差的主要来源之一，因此需要一种对 SPAM（制备与测量）误差不敏感、且实验开销可控的表征方法。若直接采样完整的两比特 Clifford 群，则标准 Clifford RB 可以给出单指数衰减并直接换算平均门保真度；但在硬件实现上，完整两比特 Clifford 的编译代价较高，线路深度和所需两比特门数都会明显增加。为在仅依赖高保真单比特 Clifford 的前提下表征待测 MS 门，本工作采用文献^[114,130]提出的 character randomized benchmarking (CRB) 方法：以局域 Clifford 群 $c_1^{\otimes 2}$ 作为随机化群，并在另一组实验中在每个循环插入一次待测的两比特 Clifford 门（此处为 MS 门），从而实现类似 interleaved RB 的两比特门表征。

多指数衰减与 character 投影：

当随机化群取 $c_1^{\otimes 2}$ 而不是完整两比特 Clifford 群时，序列平均信号一般不再是严格的单指数衰减。对于两比特系统，在 Pauli 转移矩阵 (PTM/Liouville) 表示

下, $\mathcal{C}_1^{\otimes 2}$ 在 $4^2 - 1 = 15$ 维无迹算符空间上诱导的表示可分解为三个不等价的不变子空间:

$$V_1 = \text{span}\{P \otimes I\}, \quad V_2 = \text{span}\{I \otimes P\}, \quad V_3 = \text{span}\{P \otimes Q\}, \quad (6.13)$$

其中 $P, Q \in \{X, Y, Z\}$, 对应的维数分别为 3, 3, 9。因此, 固定制备-测量设置下的平均存活概率一般呈现三指数叠加的形式^[114]:

$$P(n) = A_0 + A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + A_3 \alpha_3^n, \quad (6.14)$$

其中 n 为循环次数 (本实验以 MS 门个数计数, 见图 6.23 横轴), A_k 与 SPAM 有关, 而三个衰减常数 $\alpha_{1,2,3}$ 分别对应上述三个子空间的衰减通道。为避免直接对式 (6.14) 进行病态的多参数拟合, 下文按 CRB 的标准做法采用 “character 投影” 的方式将三个指数通道逐一分离, 从而把问题化为三个独立的单指数拟合^[114]。

线路协议与数据处理流程:

对每个循环长度 n , 实验流程如下:

1. **序列生成:** 随机采样 n 个局域 Clifford $C_k^{(1)} \otimes C_k^{(2)} \in \mathcal{C}_1^{\otimes 2}$ 。在 “含 MS 门” 的实验中, 每一循环在局域 Clifford 后插入一次两比特 MS 门 U_{MS} ; 在参考实验中将该门替换为等效时长的空操作, 其余保持一致。于是每一循环可记为:

$$G_k = \left(C_k^{(1)} \otimes C_k^{(2)} \right) U_{\text{MS}} \quad (\text{参考实验: } U_{\text{MS}} \rightarrow \mathbb{I}). \quad (6.15)$$

2. **恢复门:** 对每条随机序列计算理想总演化 $G_n \cdots G_2 G_1$, 并附加恢复 Clifford

$$R = (G_n \cdots G_2 G_1)^{-1}, \quad (6.16)$$

使得在无噪声极限下整体电路等效于恒等操作, 从而将输出确定性地映射回输入计算基态。

3. **四个初态的测量概率:** 分别以 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 作为初态运行同一组 CRB 线路 (即相同的随机门序列与恢复门), 并在计算基测量末态为 $|00\rangle$ 的概率, 分别记为 $P_{00}(n), P_{01}(n), P_{10}(n), P_{11}(n)$ 。

4. **character 投影与单指数拟合:** 按下式构造三个线性组合:

$$\begin{aligned} P_1(n) &= P_{00}(n) - P_{01}(n) + P_{10}(n) - P_{11}(n), \\ P_2(n) &= P_{00}(n) + P_{01}(n) - P_{10}(n) - P_{11}(n), \\ P_3(n) &= P_{00}(n) - P_{01}(n) - P_{10}(n) + P_{11}(n), \end{aligned} \quad (6.17)$$

它们分别对应 V_2, V_1, V_3 三个不变子空间的投影 (等价地, 可理解为与 $\langle IZ \rangle, \langle ZI \rangle, \langle ZZ \rangle$ 相关的信号)。在 CRB 理论框架下, 上述三个投影信号可分别用单指数拟合:

$$P_i(n) = A_i \alpha_i^n, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.18)$$

5. **等效去极化参数与平均保真度**: 由三条通道的维数权重 (3, 3, 9) 可构造等效衰减参数:

$$\alpha = \frac{3}{15}\alpha_1 + \frac{3}{15}\alpha_2 + \frac{9}{15}\alpha_3, \quad (6.19)$$

并据此换算两比特平均门保真度 ($d = 4$):

$$F_{\text{avg}} = \frac{3\alpha + 1}{4}. \quad (6.20)$$

实验结果与 MS 门误差提取:

图 6.23(a) 给出了包含 MS 门时三条投影信号 P_1, P_2, P_3 的拟合结果, 对应的衰减常数分别为 $\alpha_1 = 0.9880(35)$ 、 $\alpha_2 = 0.9876(36)$ 、 $\alpha_3 = 0.9877(36)$, 由式 (6.19) 得到等效参数 $\alpha_{\text{all}} = 0.9877(24)$ 。图 6.23(b) 为将 MS 门替换为恒等门后的参考实验, 得到 $\alpha_1^{\text{ref}} = 0.9951(28)$ 、 $\alpha_2^{\text{ref}} = 0.9973(28)$ 、 $\alpha_3^{\text{ref}} = 0.9935(29)$, 等效参数 $\alpha_{\text{ref}} = 0.9946(19)$ 。可以看到, 加入 MS 门后三条投影信号均加速衰减; 按参考实验归一化后, 三个衰减通道给出的 MS 门贡献在误差范围内接近, 其中 P_2 通道对应的比值略低。

为了从两组数据中剥离出待测 MS 门的独立误差, 我们需要假设插入的 MS 门误差与序列中的背景误差是相互独立的 (即满足乘性近似, multiplicative approximation)^[114,130]。在此假设下, 我们可以对三个衰减通道分别取比值来隔离 MS 门的贡献:

$$\alpha_i^{\text{MS}} \approx \frac{\alpha_i^{\text{all}}}{\alpha_i^{\text{ref}}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \alpha_{\text{MS}} = \frac{3\alpha_1^{\text{MS}} + 3\alpha_2^{\text{MS}} + 9\alpha_3^{\text{MS}}}{15}. \quad (6.21)$$

代入实验拟合结果可得等效参数 $\alpha_{\text{MS}} \approx 0.9931(31)$ 。其中 α_{all} 、 α_{ref} 与 α_{MS} 的不确定度均由图 6.23 中拟合得到的 α_i 参数按误差传播公式估算得到。

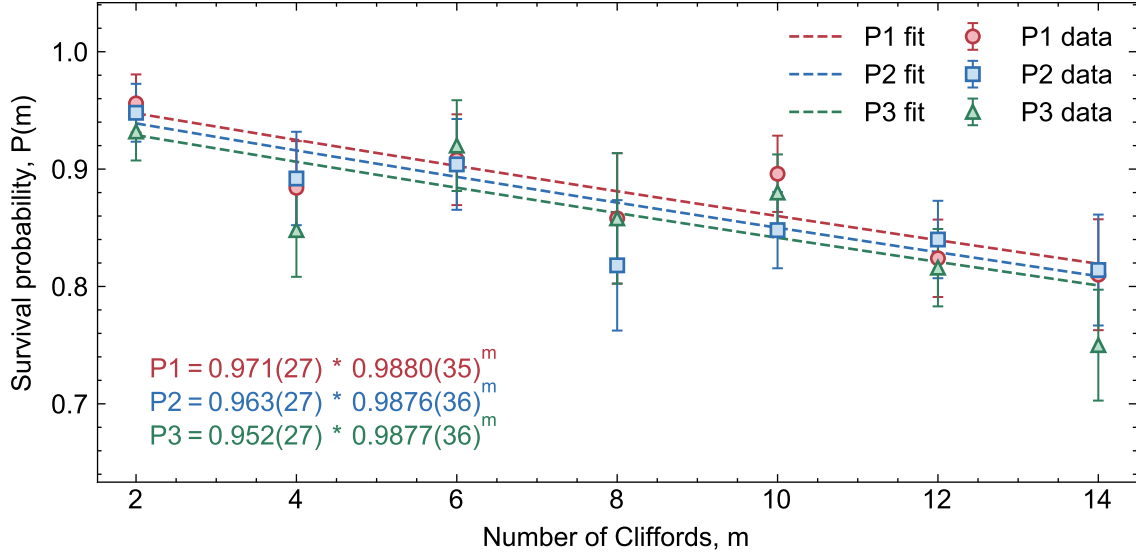
进一步地, 若假设系统中的主要噪声表现为各向同性的去极化 (depolarizing) 错误, 我们可以将该衰减参数转化为 MS 门平均保真度的点估计 (point estimate):

$$F_{\text{avg}}^{\text{MS}} = \frac{3\alpha_{\text{MS}} + 1}{4} \approx 0.9948(23). \quad (6.22)$$

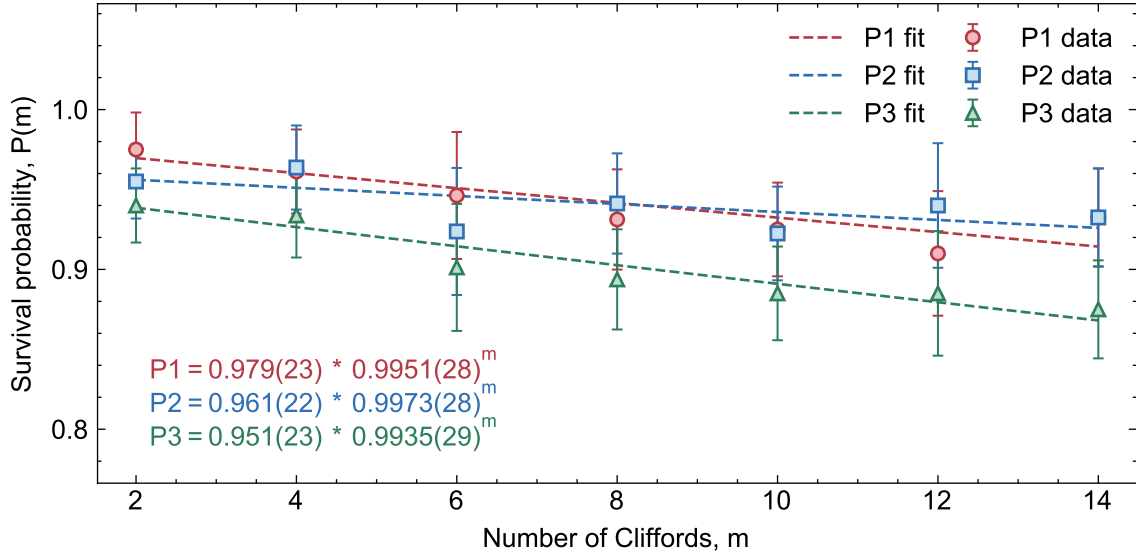
需要指出的是, 严格的理论分析表明, 此类交织基准测试 (interleaved RB/CRB) 给出的是目标门保真度的理论上下界, 而非无条件的精确等式。上述 0.9948(23) 的点估计依赖于误差可分解且门依赖效应较弱等前提; 当实际系统中存在显著的相干误差、串扰或非马尔可夫效应时, 该估计值可能出现偏差, 此时可结合更完整的扩展 RB 与补充表征手段进行交叉验证^[114,130]。

6.3.4 门误差实验标定与分析

在第五章中, 我们已经分析了门保真度的主要误差理论来源。本节进一步从实验角度对这些误差项进行标定与量级估计, 并讨论其与随机基准测试结果之间的对应关系: 一方面用于判断当前主要限制项, 另一方面用于指导后续实验优化方向。



(a) 包含 MS 门的两比特 CRB 结果



(b) 参考实验结果

图 6.23 两比特 CRB 及其参考实验结果对比。(a) 给出了包含 MS 门的两比特 CRB 结果, (b) 给出了相应的参考实验结果; 在参考实验中, 保持相同的随机化序列与读出流程, 并将原序列中的 MS 门替换为等时长空操作。横轴为序列中名义 MS 门的数量 n , 纵轴为由式 (6.17) 构造的三条 character 投影信号。虚线表示单指数拟合 $P_i(n) = A_i \alpha_i^n$, 图中标题所示的 P 为按式 (6.19) 加权得到的等效衰减参数 α 。误差棒对应 68% 置信区间。

表 6.5 RB 拟合得到的平均门保真度（由图中标注的拟合参数计算）。

实验	平均保真度 F_{avg}
单比特 RB（MW 驱动，按 Clifford 计数）	0.999974(4)
单比特 RB（Raman 驱动，按 Clifford 计数）	0.99986(2)
由参考序列扣除得到 MS 门	0.9948(23)

表 6.5 汇总了本章随机基准测试得到的平均门保真度与平均误差率。需要指出的是，上一小节基于 parity oscillation 直接得到的未经读出修正的 Bell 态保真度为 0.97(2)。该值与 CRB 提取到的平均门保真度并非同一物理量，但二者差异的方向是一致的：前者直接受到 SPAM 的影响，而后者在定义上对 SPAM 更不敏感。以第 4 章中得到的单比特读出误差 $\epsilon_{01} \sim 0.01$ 、 $\epsilon_{10} \sim 0.02$ 为例，若近似取对称读出误差 $\epsilon_m \approx (\epsilon_{01} + \epsilon_{10})/2 \approx 0.015$ ，并代入式 (5.128) 中的 $F_{\text{true}} \approx 0.9948(23)$ ，则可预期观测到的 parity-based 保真度落在 $F_{\text{obs}} \sim 0.95$ 的量级。这说明上一小节中原始 parity-based 保真度的主要限制并非门本身，而是读出相关误差。

对于相干误差，我们需要将第五章中的解析表达式与实验具体参数对应起来。然而，实验上并不能直接获得“真实参数”与“理想参数”之间的绝对偏差，因此本文采用如下近似处理：首先将经过扫描优化后的工作点视为名义最优值；随后对关键参数进行长时间漂移监测，并将监测到的典型相对偏离量（或实验精度）作为误差项中 $d\delta$ 、 $\delta\Omega/\Omega$ 、 $\delta\phi_s$ 等量的实验估计。需要特别说明的是，相干误差项之间本质上是么正误差，存在相干相长或相消的可能，因此把各子项独立统计后直接相加，只能得到一个保守的上界估计，而不能严格等同于最终观测到的平均门误差。其更重要的意义在于判断不同误差源的相对重要性，并为后续实验优化提供方向。

对于退相干误差，在对门模式完成有效表征后，可以将第五章中的有限热占据项、加热率项和运动退相干项直接代入估计。按本实验所采用的门时 $t_g \sim 150 \mu\text{s}$ 的量级，后面将看到，对于单个门而言，这些项总体低于主要相干误差项，不构成当前平均门误差的首要限制因素。

对于统计与读出相关误差，则可以直接由采样次数以及第二章中的光子计数直方图所得到的 SPAM 参数，通过式 (5.128) 进行估计。其中，前者给出实验误差条的统计量级，后者给出读出误差对实测 Bell 态不保真度的系统性贡献。

由于本节所讨论的参数漂移监测主要针对 Raman 光学链路，因此下面关于单比特门的量级估计主要针对 Raman 单比特门展开。相比之下，MW 单比特 RB 的误差率更低，可视为当前系统的单比特操控基线；而 Raman 单比特门与两比特 MS 门共享同一套光学系统，其误差来源更适合放在同一框架下比较。

为标定 Rabi 频率的偏离量，实验上对离子施加固定周期的单比特驱动，并长时间记录结果以表征 Rabi 频率的稳定性。图 6.24 给出了 900 min 的漂移监测结果，显示长期波动范围约为 6%。考虑到实际实验中每隔 60 至 120 min 会进行一次工作点的重新标定，故可取 $\delta\Omega/\Omega \sim 1\%$ 作为 Rabi 频率偏离量的实验估计。

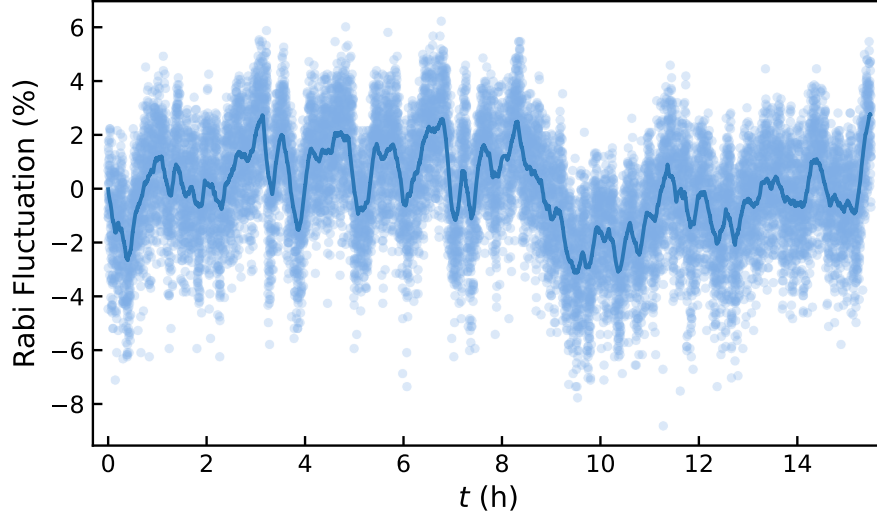


图 6.24 Rabi 频率漂移监测。通过对固定单比特驱动结果进行长时间重复记录，表征 Raman 光学链路下有效 Rabi 频率的稳定性。

为标定红蓝边带耦合不平衡项，实验上采取如图 6.25 所示的方法：通过改变左侧 AOM 的频率设置，使左侧 Raman 光分别与 MS 门配置下右侧 Raman 光中的 BSB 和 RSB 频率分量形成载波共振，并分别拟合两种情况下的载波 Rabi 频率。两者之比可用来表征 MS 门工作点下红蓝边带光学耦合强度之比。注意，这里讨论的是不含 Lamb-Dicke 系数的光学耦合比，而非等效边带 Rabi 频率之比。若记

$$\xi \equiv \frac{\Omega_r}{\Omega_b}, \quad r = \frac{\Omega_r - \Omega_b}{\Omega_r + \Omega_b} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1},$$

则图中的长期（100 min）漂移监测结果对应的相对值整体波动范围约为 5%，可取 $r \approx 2.5\%$ 作为红蓝不平衡项的实验估计。

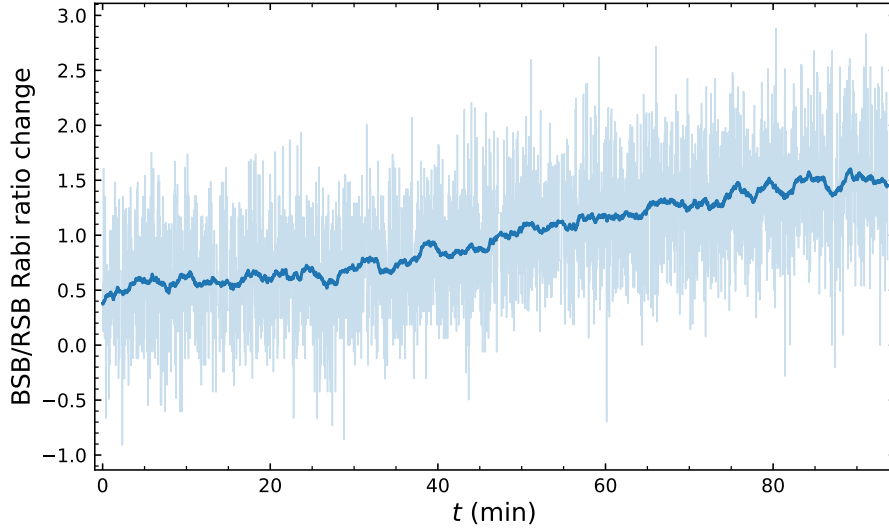


图 6.25 BSB 与 RSB 对应 Rabi 耦合比值波动监测。通过改变左侧 AOM 频率，使左侧 Raman 光分别与 MS 门配置下右侧 Raman 光中的 BSB 和 RSB 频率分量形成载波共振，并对两种配置下的载波 Rabi 频率进行长期监测。图中浅色曲线为实验原始数据，深色实线为滑动平均后的趋势线，用于表征 Ω_r/Ω_b 的漂移行为。

为标定门失谐相关误差项，进一步对门模式中心频率进行长期监测。以 COM 模为例，结果如图 6.26 所示。实验上通过重复扫描并拟合该模式的谱峰中心频率，得到其随时间的漂移量，并将该漂移直接代入误差项中的 $d\delta/\delta$ 。对本实验所采用的 MS 门参数而言，可取 $\delta \sim 10$ kHz、 $d\delta \sim 100$ Hz 作为典型量级。

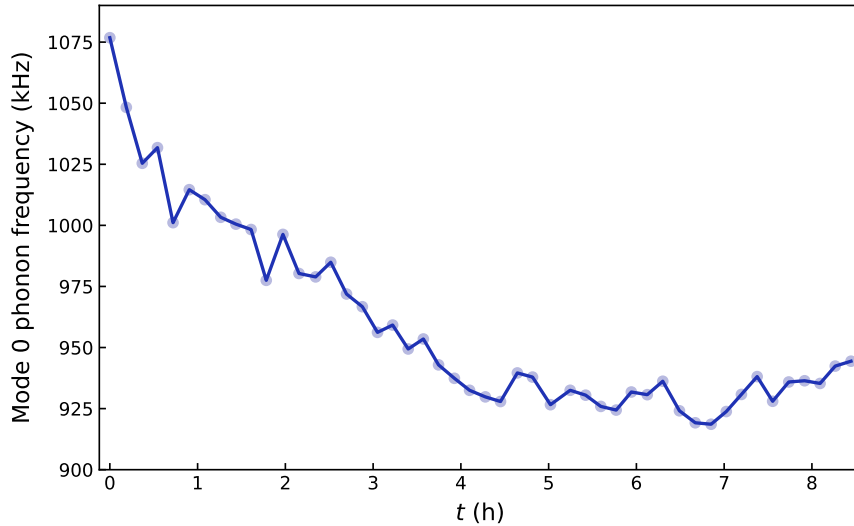


图 6.26 COM 模频率漂移监测。通过重复扫描并拟合门模式中心频率，得到其随时间的变化；该漂移量用于估计 MS 门误差模型中的 $d\delta/\delta$ 项。

下面首先从式 (5.81) 和式 (5.82) 出发，讨论 Raman 单比特门主要误差项的量级。

1.

$$\frac{2}{3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{\delta \mu}{\Omega_{\text{Raman}}} \right)^2 + \frac{\theta^2}{6} \left(\frac{\delta \Omega_{\text{Raman}}}{\Omega_{\text{Raman}}} + \frac{\delta t}{t} \right)^2.$$

该项对应参数 mis-set 引起的误差。对本实验而言, $\theta = \pi/2$, 第一项可忽略, $\delta \Omega/\Omega \sim 1\%$, 而数字时序误差 $\delta t/t$ 相对更小。由此估计, 该项引起的不保真度约为 0.01% 量级。

2.

$$\frac{\sqrt{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2}}{\Omega_0} \simeq \eta^2 \sqrt{\bar{n}(\bar{n} + 1)}.$$

该项对应声子热涨落导致的等效 Rabi 频率涨落。取 $\eta \approx 0.04$ 、 $\bar{n} \approx 0.5$, 则其对应的不保真度约为 $\sim 10^{-6}$, 远小于前述参数 mis-set 项。

综合来看, 当前 Raman 单比特门的误差预算主要由光强/位置漂移引起的参数 mis-set 项主导, 而声子热涨落项可以忽略不计。若将以上两项作保守估计, Raman 单比特门的总不保真度约为 10^{-4} 量级, 这与表 6.5 中 Raman 单比特 RB 给出的 1.48×10^{-4} 结果在量级上是一致的。剩余差异可归因于未在此处单独展开的相位噪声、慢漂移以及统计与读出修正等因素。

下面再从式 (5.105) 和式 (5.106) 出发, 讨论两比特 MS 门主要误差项的量级。

1.

$$\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\eta_2 \Omega_2} + \frac{\eta_2 \Omega_2}{\eta_1 \Omega_1} \right) \left(\frac{d\delta}{\delta} + \frac{dt}{t} \right)^2.$$

该项对应参数 mis-set 引起的相空间残余位移误差。对本实验而言, δ 约为 10 kHz, $d\delta$ 约为 100 Hz; 而数字时序误差 $\delta t/t$ 可近似忽略。由此估计, 该项引起的不保真度约为 0.02% 量级。

2.

$$\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\delta \Omega_1}{\Omega_1} + \frac{\delta \Omega_2}{\Omega_2} - \frac{2d\delta}{\delta} \right)^2.$$

该项为参数 mis-set 引起的几何相位误差项。取 $d\delta/\delta \sim 1\%$, 两束 Raman 光强度对应的相对波动取为 $\delta \Omega/\Omega \sim 1\%$, 可得该项引起的不保真度约为 0.1%。

3.

$$\delta \phi_s^2.$$

该项为转轴角度误差引起的不保真度。 $\delta \phi_s$ 主要来源于相位标定拟合精度, 取 $\delta \phi_s \approx 0.05$ rad, 对应不保真度约为 0.25%。

4.

$$2 \left(\frac{\Omega_1}{\mu} \right)^2.$$

该项为离共振载波项引起的不保真度。取 $\mu \approx 1 \text{ MHz}$ 、 $\Omega_1 \approx 60 \text{ kHz}$ ，对应不保真度约为 0.72%。从量级上看，这是当前误差 budget 中的主导项之一。

5.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right) \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\mu}\right)^2.$$

该项为旋波近似高阶项引起的不保真度。取 $\mu \approx 1 \text{ MHz}$ 、 $\eta_1 \Omega_1 \approx 5 \text{ kHz}$ ，可得其对应不保真度约为 0.0028%，远小于前述主导项。

6.

$$\langle (2\bar{n} + 1)^2 \rangle r^2.$$

该项为红蓝边带强度不平衡引起的不保真度。由图 6.25 的长期监测结果可取 $r \approx 2.5\%$ ；在当前近基态冷却条件下，对应不保真度约为 0.06%。

7.

$$6(\delta_{\text{cl}} t_g)^2.$$

该项为中心频率失配引起的不保真度，通常由中心频率校准拟合误差导致。取 $\delta_{\text{cl}} \sim 30 \text{ Hz}$ 、 $t_g \sim 150 \mu\text{s}$ ，对应不保真度约为 0.014%。

8.

$$\frac{\pi^2}{4} \eta^4 \bar{n}(2\bar{n} + 1).$$

该项为冷却残余声子数造成的误差。直接将本工作实验参数带入，对应不保真度约为 0.00002%，基本可忽略。

9.

$$\frac{\dot{\bar{n}} t_g}{2K}.$$

该项为声子加热率造成的误差。直接将本工作实验参数带入（取 $K = 1$ ，且使用非 COM 模），对应不保真度量级约为 0.01%。

10.

$$\alpha_K \frac{t_g}{\tau}.$$

该项为声子退相干造成的误差。直接将本工作实验参数带入（取 $K = 1$ ），对应不保真度量级约为 0.05%。

为便于比较不同误差源的重要性，表 6.6 汇总了单比特 Raman 门与两比特 MS 门主要误差项的实验估计结果。表中数值均为代入本节实验参数后得到的量级估计，其主要用途是比较不同误差源的相对贡献；对于相干误差项，独立求和仅对应一个保守上界。

综合以上实验标定结果，可以看出当前系统中限制 Raman 单比特门进一步提升的主导因素主要是参数 mis-set 相关项，而热声子相关修正基本可以忽略；这一

表 6.6 单比特 Raman 门与两比特 MS 门主要误差项的实验估计汇总。

门类型	误差来源	估计不保真度
Raman 单比特门		
参数 mis-set 项	式 (5.81) 第一、二项	$\sim 1.0 \times 10^{-4}$
声子热涨落项	式 (5.82)	$\sim 1 \times 10^{-6}$
保守总计	—	$\sim 1.0 \times 10^{-4}$
两比特 MS 门		
相空间不闭合项	式 (5.105) 第一项	$\sim 2 \times 10^{-4}$
几何相位误差项	式 (5.105) 第二项	$\sim 1 \times 10^{-3}$
相位零点标定项	$\delta\phi_s^2$	$\sim 2.5 \times 10^{-3}$
载波失谐激发项	$2(\Omega_1/\mu)^2$	$\sim 7.2 \times 10^{-3}$
旋波近似高阶项	$\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right) \left(\frac{\eta_1 \Omega_1}{\mu}\right)^2$	$\sim 2.8 \times 10^{-5}$
红蓝不平衡项	$\langle (2\bar{n} + 1)^2 \rangle r^2$	$\sim 6 \times 10^{-4}$
中心频率失配项	$6(\delta_{cl} t_g)^2$	$\sim 1.4 \times 10^{-4}$
残余热占据项	$\frac{\pi^2}{4} \eta^4 \bar{n} (2\bar{n} + 1)$	$\sim 2 \times 10^{-7}$
声子加热率项	$\frac{\hbar t_g}{2K}$	$\sim 1 \times 10^{-4}$
声子退相干项	$\alpha_K t_g / \tau$	$\sim 5 \times 10^{-4}$
保守独立求和	—	$\sim 10^{-2}$

判断与 Raman 单比特 RB 得到的误差率在量级上相符。对于两比特 MS 门，当前主导限制项主要来自载波失谐激发、门相位零点标定误差、几何相位相关的幅度/失谐漂移以及声子退相干项；而相空间不闭合项、二阶旋波近似项、残余热占据项以及中心频率失配项则处于次一级贡献。若将以上各项作保守独立求和，可得到约 1% 量级的上界估计，这一数值高于 CRB 提取到的 0.52% 平均门误差率。这种差异是可以预期的：一方面，各相干误差项并非简单概率过程，不能直接作独立加和；另一方面，这里的各参数偏离量使用的是长时间漂移统计得到的保守估计，而非门作用瞬间的真实同时偏差。尽管如此，该误差 budget 仍然清楚地给出了后续优化方向：对于单比特 Raman 门，应优先改善 Rabi 频率稳定性；对于两比特 MS 门，非共振载波激发项、门相位零点标定误差、几何相位相关的幅度/失谐漂移以及声子退相干构成了主要限制，为将两比特门进一步推向 99.9% 量级，需要重点降低非共振载波激发、提高 MS 门相位标定精度、提升门模式频率的在线跟踪能力，并结合 smooth gate 等鲁棒波形进一步抑制幅度漂移和声子退相干带来的累积误差。

6.4 本章小结

本章建立了从 Raman 光源链路、低串扰 AOD 寻址、声子模式标定到单/双比特门随机基准表征的完整实验闭环。结果表明：Raman 单比特门的 RB 平均保真度达到 99.986(2)%，两比特 MS 门的 CRB 平均保真度达到 99.48(23)%，并且在 5 比特子系统中可对所有离子对实现全连通高保真 MS 门制备与表征。下面进一步将本文结果与若干代表性平台进行对比，以定位当前系统所处的国际水平。

表 6.7 和表 6.8 汇总了截至 2026 年 3 月公开可检索、具有代表性的量子计算团队单比特门与两比特门保真度水平。需要说明的是，不同团队采用的表征指标并不完全一致：有的给出 randomized benchmarking 平均 Clifford 误差，有的给出 Bell 态或子空间基准得到的两比特门保真度，还有的给出整机平均规格，并不完全可横向等同。

从表 6.7 和表 6.8 可见，离子阱平台在单比特门和两比特门上整体处于各物理路线的前列。就本文结果而言，单比特门 99.986(2)% 处于国内较好水平，但与国际头部团队 $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 量级的单比特误差相比仍有压缩空间；两比特门已达到 99.48(23)%，但与国际头部离子阱团队相比仍有明确差距。

表 6.7 截至 2026 年 3 月代表性离子阱量子计算团队单比特门与两比特门保真度比较（不同条目采用的 fidelity metric 不完全可横向等同，表中仅用于量级比较）

团队/机构	国家	单比特门保真度	两比特门保真度	说明
本工作	中国	99.986(2)%	99.48(23)%	/
USTC 李传锋组	中国	/	> 98.5%	光偏振梯度（optical Magnus）单独寻址纠缠门；兼容 2D/光镊架构 ^[131]
USTC 林毅恒组	中国	/	> 99%	5-ion $^{40}\text{Ca}^+$ 链中基于轴向模的两比特门 ^[132]
清华金奇奂组	中国	99.89(1)%	99.01(6)%	误差抑制基准中提取的物理门误差率 ^[133-134]
清华段路明组（2D 离子晶体）	中国	/	98.6(2)%	4-ion $^{171}\text{Yb}^+$ 2D 晶体任意离子对寻址纠缠门 ^[35]
清华段路明组（dual-type 节点）	中国	/	96.3(8)%	functioning dual-type $^{171}\text{Yb}^+$ quantum network node 中 communication-memory 两离子纠缠门的 Bell 态保真度 ^[135]
清华段路明组（dual-type $^{137}\text{Ba}^+$ ）	中国	/	96.3(4)%	直接 dual-type S-D 两比特纠缠门 ^[136]
国防科大陈平彤组	中国	98.98(8)%	/	室温表面电极阱；公开论文尚未给出可直接比较的两比特门保真度 ^[137]
中山大学罗乐组	中国	> 98%	> 98%	单个 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子中电子自旋与核自旋双编码的 1-ion-2-qubit 处理器 ^[138]
AQT IBEX Q1	奥地利	99.97(1)%	98.7(3)%	官方整机规格（全寄存器平均） ^[139]

续下页

表 6.7 (续)

团队/机构	国家	单比特门保真度	两比特门保真度	说明
Oxford Ionics / IonQ	英国	99.99916(7)%	99.9916(7)%	全电子单比特门与 smooth gate 结果 ^[111,140]
Oxford University (Lucas)	英国	99.999985%	99.9(1)%	微波单比特极限与经典两比特门结果 ^[102,141]
Duke / IonQ	美国	99.5%	97.5%	11 比特可编程离子阱计算机平均结果 ^[142]
NIST Boulder	美国	99.9980(2)%	99.92(4)%	⁹ Be ⁺ 超精细量子比特 ^[103,143]
Quantinuum Helios	美国	99.9975(1)%	99.921(2)%	98 比特 QCCD 处理器区平均结果 ^[144]
Innsbruck / Blatt / Peter Zoller	奥地利	/	> 99.5%	¹³⁸ Ba ⁺ 梯度场 light-shift 纠缠门; 最多 12-ion 链, 2026 arXiv ^[145]
Weizmann / Ozeri	以色列	> 99.7%	97.3(2)%	单比特取自 2015 optical-qubit universal gate-set (单次 π 翻转); 两比特取自 2022 五离子机平均 SPAM-corrected Bell 态保真度 ^[146-147]
University of Siegen / Wunderlich	德国	/	98 ⁺² ₋₃ %	RF / microwave 驱动

表 6.8 截至 2026 年 3 月其他物理平台代表性量子计算团队的单比特门与两比特门保真度比较 (不同条目采用的 fidelity metric 不完全可横向等同, 表中仅作参考)

团队/机构	单比特门保真度	两比特门保真度	说明
超导			
浙大王浩华/宋超/王震组 (Kunlun)	99.95%	99.22%	32 比特 Kunlun 处理器平均并行门保真度 (simultaneous XEB) ^[148]
USTC 祖冲之 3.0	99.90%	99.62%	105 比特处理器并行门操作保真度指标 ^[149]
北京量子院/中科院物理所/清华	/	99.38%	AshN 任意两比特门平均保真度; 统一控制方案 ^[150]
腾讯量子实验室	99.95(2)%	99.2(2)%	13 比特钽处理器 isolated RB; simultaneous RB 单比特为 99.94(2)% ^[151]
本源量子“悟空”	99.74%	96.57%	102 比特处理器论文 Table 1 给出的平均硬件参数 ^[152]
USTC 郭国平组 / 本源“夸父”	99.86%	97.9%	短路径非绝热几何门; RB 与 QPT 表征 ^[153]
Oliver 团队 (fluxonium)	> 99.997%	/	fluxonium 快速单比特门; 单比特指标最优之一 ^[154]
Lin / Cho / Wang / Manucharyan (fluxonium)	/	99.94%	60 ns 直接 CNOT; 本表所列超导路线中两比特指标最高 ^[155]
中性原子			
USTC 潘—陆组	/	99.81(1)%	非破坏擦除探测两比特受控逻辑门 ^[156]

续下页

表 6.8 (续)

团队/机构	单比特门 保真度	两比特门 保真度	说明
Harvard / MIT / QuEra (Lukin)	~ 99.9%	99.6%	本地单比特与 CZ 两比特门；中性原子主流代表 团队 ^[30]
硅自旋			
UNSW / SQC	> 99.90%	99.90(4)%	11 比特原子级硅处理器；本表所列硅自旋路线中 两比特指标最高 ^[157]
RIKEN / QuTech	99.8%	99.5%	硅自旋快速门操作；硅量子点代表性结果 ^[158]
QuTech / Vandersypen	99.72%	> 99.5%	Nature 2022；跨越 surface-code 典型阈值量级的 代表性结果 ^[159]
金刚石 NV			
QuTech / Taminiau	99.999(1)%	99.93(5)%	NV 电子-核自旋二比特通用门集；该路线代表性 高保真结果 ^[160]

第7章 量子线路实验验证

随着单、双比特原生门保真度逐步逼近 10^{-3} 量级及以下，量子处理器能力评估的重点已从“单个门是否足够好”进一步转向“由高保真寻址门支撑的量子线路能否稳定执行”，单一随机线路指标已难以完整反映“可执行的有效算法规模”。系统级线路的有效深度同时受到门误差、读出误差、串扰、编译开销与长期漂移的共同限制^[11-12,161]。

量子体积（Quantum Volume, QV）是目前使用较广的系统级综合指标之一。其核心思想是：在给定宽度与深度相等的随机模型线路族上，统计重输出（heavy-output）生成概率是否显著超过阈值 $2/3$ ，从而把可用量子比特数、门保真度、连通性与编译效率压缩为单一标量^[9]。与门级 RB/CRB 等方法相比，QV 不要求真实实现编码/解码与综合征测量，但能在较低系统复杂度下暴露编译、校准与运行时误差的累积效应，因此适合作为检验门级能力是否已转化为线路级能力的系统级基准测试（benchmark）^[9,162]。

本章基于前述高保真单比特 Raman 门与两比特 MS 门能力，进一步展示两类“线路级”实验结果：（i）在 5 个离子比特上制备 GHZ 纠缠态并给出保真度评估；（ii）在 5 比特子系统上完成 QV32 验证。为支撑长时间、多批次的线路运行，本章首先介绍面向线路执行的分层编译与运行时校准框架，并重点讨论 Raman 系统中相位拼接与 AC Stark shift 补偿的实现流程；随后给出 GHZ 与 QV32 的实验步骤、统计方法与结果讨论。

7.1 量子线路编译与系统校准

在完成单比特与两比特门的门级表征之后，若要进一步执行 GHZ 与 QV 随机线路，系统必须在较长时间尺度内稳定地调度“线路—时序—脉冲—硬件执行”全链路，并在运行过程中自动穿插校准、漂移监测与异常处理等非标准测控任务。换言之，决定系统级性能的并不只是某一次门的最优保真度，而是门参数能否被持续维护并在运行时闭环锁定在允许区间内。最新的量子处理器通常采用多层中间表示与硬件感知编译，将抽象门线路逐级翻译到脉冲级控制与实时硬件指令；相关思想在 OpenQASM 3、OpenPulse 等软硬件接口以及噪声感知编译研究中已有系统讨论^[163-165]。

7.1.1 测控任务分层编译框架

本工作将标准量子线路与校准、SPAM 表征等非标准测控任务统一抽象为可调度的任务对象，并纳入同一编译框架。其翻译过程概括为表 7.1 所示的三个层级。

表 7.1 本文用于 5 比特 GHZ 与 QV32 实验的分层编译框架。这里 **point** 表示一组固定实验参数下的测量点，**shot** 表示该 **point** 下的一次完整“冷却—制备—操作—探测”执行序列。

层级	主要输入	核心功能	主要输出
物理层编译	抽象逻辑门线路、任务描述	本地门分解、比特选择与映射优化、相位框架管理、线路深度压缩与回波结构插入	本地门序列
时序层编译	本地门序列或自定义实验任务	任务识别、 points/shots 展开、参数属性检查、校准任务插入、运行顺序调度	带标记的时序流
脉冲层编译	时序流、参数表、波形模板	DDS/AWG 波形生成、调制波形拼接、硬件接口下发、测量数据回传与在线处理	可执行脉冲与测量结果

在上述框架中，物理层编译主要负责将抽象线路转化为本地门集；时序层编译侧重于测控任务的时序调度；脉冲层编译则负责底层波形的生成。相应地，本文在时序层和脉冲层之上抽象出三类微指令：其一是校准与运行时控制指令集，用于参数标定、漂移监测与阈值判定；其二是硬件调试指令集，用于 SPAM、冷却与门时长等非标准流程；其三是 *Raman* 波形管理指令集，用于一般波形、调制波形以及特例波形的统一生成与调用。通过这一抽象，标准量子线路与非标准测控任务被统一在同一调度框架中（仅接入层级不同），从而避免了不同实验脚本彼此割裂的问题。对于基于 ARTIQ 的离子阱平台，还需要进一步解决实时控制软件的模块化与宿主机/实时内核协同等问题^[166-167]。

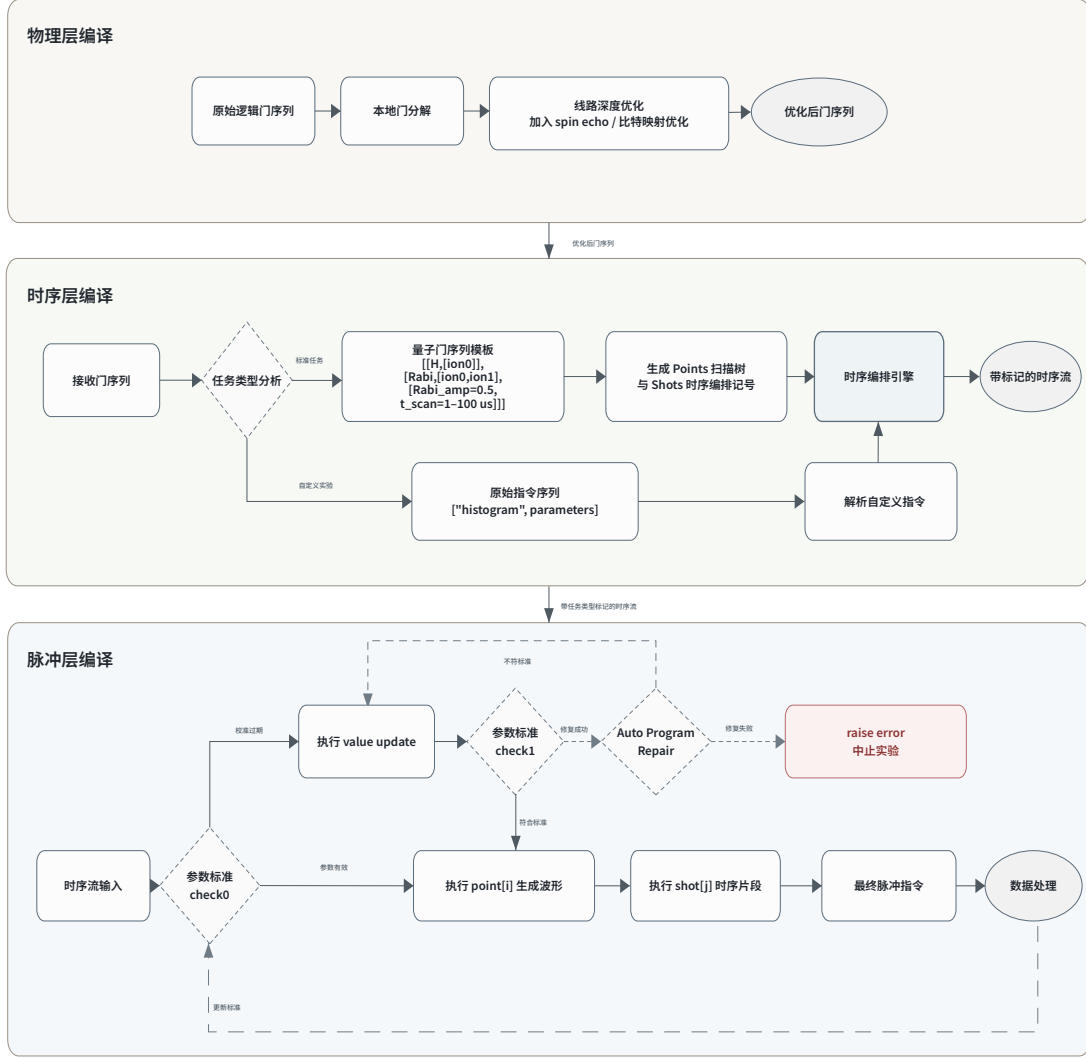


图 7.1 测控任务分层编译框架流程图。该流程把标准量子线路与校准/维护类测控任务统一调度，并在 point 之间插入参数有效性检查、必要的修复校准以及失败回退逻辑，从而服务于长时间、多批次的线路执行。

物理层编译——从抽象量子线路到本地门集：

对任意待执行线路（如 GHZ 制备线路和 QV 随机线路），首先由 Qiskit 生成目标线路集，并在编译时下翻译到本平台的本地门集：

$$\mathcal{G}_{\text{native}} = \{R_x(\theta), R_y(\theta), R_{zz}(\pi/2)\}. \quad (7.1)$$

其中 $R_x(\theta)$ 与 $R_y(\theta)$ 由单比特 Raman 载波脉冲实现；固定角度的 $R_{zz}(\pi/2)$ 由原生 $MS(\pi/2)$ 门与前后两个本地旋转构造。其关系可写为：

$$R_{zz}\left(\frac{\pi}{2}\right) \doteq \left[R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] U_{\text{MS}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left[R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right) \otimes R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], \quad (7.2)$$

其中符号“ $\doteq$ ”表示两侧在忽略整体相位后等价。相应线路如图 7.2 所示。

除门分解外，物理层编译还会结合本平台的门时长、误差水平与可寻址比特集合进行轻量级硬件感知优化，例如相位合并、冗余旋转消除、回波结构插入等^[165]。

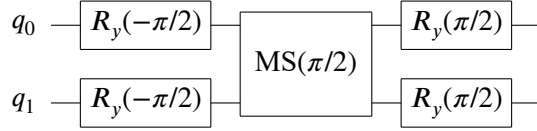


图 7.2 利用原生 $MS(\pi/2)$ 门与前后两个本地 $R_y(\pm\pi/2)$ 旋转构造 $R_{zz}(\pi/2)$ 的线路示意图。该分解用于将 QV 随机线路中的两比特操作下翻译为本平台可执行的原生门序列。

在本文使用的 5 比特全连通子系统中，SWAP 路由并非主要深度开销来源，但不同离子对上的两比特门误差与串扰并不完全一致，因此编译器会优先选取校准状态更新更近、误差更低的离子对来承载关键操作。

物理层编译完成后，宿主机将本地门序列翻译为 ARTIQ 可识别的门对象列表，并在 `point/shots` 结构下组织为可执行时序。一个简化的 `circuit-to-shot` 接口示例如下：

Listing 7.1 从本地门序列到 `shot` 列表的主机侧接口示意。

```

from qiskit import transpile
import numpy as np

# Convert a QuantumCircuit into an ARTIQ-friendly "shot" list.
def circuit2shot(qc: QuantumCircuit):
    qc_trans = transpile(qc, basis_gates=["rzz", "rx", "ry"],
        optimization_level=1)
    shot = []

    for inst, qargs, _ in qc_trans.data:
        if inst.name == "rzz":
            q0 = qc_trans.qubits.index(qargs[0])
            q1 = qc_trans.qubits.index(qargs[1])
            shot.append({
                "name": "Rzz",
                "args": {"qubit_index": (q0, q1)}
            })

        elif inst.name in ("rx", "ry"):
            q0 = qc_trans.qubits.index(qargs[0])
            theta = float(inst.params[0])
            # Convert Rx/Ry to a phase-defined rotation R_phi(theta).
            phi = 0.0 if inst.name == "rx" else np.pi / 2
            if theta < 0:
                theta = -theta
            phi += np.pi
            shot.append({
                "name": "Rphi",
                "args": {"qubit_index": (q0,), "theta": theta,
                    "phi": phi}
            })

```

```
return shot
```

时序层编译——从门对象到可调度的时序流：

时序层编译并不直接生成硬件波形，而是负责将“门对象”或“自定义测控任务”翻译为可调度的时序片段，并在这一过程中统一处理参数属性检查与校准任务插入。输入既可以是标准量子线路，也可以是诸如 pumping test、histogram、Rabi/Ramsey 扫描等非标准实验任务。对前者，编译器展开为 points/shots；对后者，编译器依据任务模板解析依赖参数、前置准备与允许调用的校准脚本，从而把“线路执行”与“系统维护/调试”统一在同一调度平台上。

本文所说的 point 表示一组固定实验参数下的测量点；在同一个 point 下，系统执行多个重复的 shot 以获得统计结果。以单比特 Raman Rabi 扫描为例，一个任务对象可被翻译为“冷却 → EIT 冷却 → 光抽运 → Raman 操作 → 探测”的时序骨架，再由 point 索引决定扫描时间、AOD 频率或脉冲振幅等参数。为保证实验参数可靠性，时序层还会读取外部参数表中的有效期属性与依赖关系，例如判定上次 EIT 校准距今是否超过阈值、某个 AOD 地址是否需要重新扫描等。

脉冲层编译——从时序片段到可执行波形：

脉冲层编译接收时序层给出的时序流与参数集合，并根据时序片段类别调用相应波形模板生成底层 DDS/AWG 波形。该层不仅负责一般方波脉冲下发，还负责 Raman 波形的特殊调制与拼接（如 AOD 扫描波形、AOM 调制门波形等）。更重要的是，脉冲层与数据处理模块之间形成闭环：一次 point 执行结束后，测得数据进入拟合、阈值判断或图像识别程序；若结果表明参数超出容差，则控制流返回上一级触发校准或修复，从而实现“测量—判定—更新—再执行”的运行时闭环。

7.1.2 门序列相位连续拼接

门间相位不连续的来源：在上述分层编译中，除门时长与振幅之外，另一个必须统一维护的量是门序列相位的一致性。对 Raman 门系统而言，即便所有操作都在各自的共振条件附近执行，不同门之间也不会天然共享同一相位参考。在等效二能级的 Bloch 球图像下，可以把每次门操作理解为在某个相互作用表象中定义了一套局域相位基准；若不做额外补偿，则不同门虽然保持相干，但其相位参考并不连续^[96,168-170]。对离子 i 而言，这种门间相位失配主要来自两部分：

1. **门操作初始相位差。**不同门对应的 Raman 光频成分不同，在经 AOM/AOD 产生对应光频之后，沿固定光程传播到离子处时，不同门会积累不同的静态光学相位。若两种门操作的光频差为 Δf_g ，则其相对初始相位差可近似写为：

$$\Delta\phi_g^{(0)} \simeq 2\pi \frac{L_{\text{AOM}} \Delta f_g}{c}, \quad (7.3)$$

其中 $L_{\text{AOM}} \sim 0.5 \text{ m}$ 为 AOM 至离子处的等效光程。

2. **差分 AC Stark shift 累积。**不同门对应的光场配置与频率失谐不同，因此门作用期间积累的差分光移相位也不同，可写为：

$$\Phi_g^{\text{LS}} = \int_0^{\tau_g} \delta_g^{\text{LS}}(t) dt \simeq \bar{\delta}_g^{\text{LS}} \tau_g, \quad (7.4)$$

其中 τ_g 为该门时长， $\bar{\delta}_g^{\text{LS}}$ 为对应的平均有效光移。

在物理脉冲层，可把与离子 i 相关的相位拼接问题归结为：一类单比特载波门 $R_\phi^{(i)}(\theta)$ 与 $N-1$ 类包含离子 i 的两比特 MS 门 $R_{xx}^{(i,j)}(\theta)$ ($j \neq i$) 之间的相对相位如何统一。由于离子处磁场不均匀性在本文实验条件下可以忽略，而不同离子之间的绝对初始相位本身也不具有直接物理意义，因此这里只需维护每个离子的局域相位框架。

门序列相位连续拼接的实现思路：本文为每个离子比特维护一个运行时相位框架 ϕ_i^{frame} 。当某一门 g 作用于离子 i 时，其实际写入的激光初相位可写为：

$$\phi_{g,\text{use}}^{(i)} = \phi_{g,\text{cal}}^{(i)} + \phi_i^{\text{frame}}, \quad (7.5)$$

其中 $\phi_{g,\text{cal}}^{(i)}$ 表示该门相对于参考单比特门的固定初始相位校准值；门结束后，再根据该门对应的光移相位更新 ϕ_i^{frame} 。对参与两比特 MS 门的两个离子，则分别写入各自的相位更新量。实验上，这一流程可分为两步完成：

1. 标定单比特门与各类两比特门的平均 AC Stark shift，用于将光频补偿到平均共振条件；
2. 标定每类两比特门相对于参考单比特门的固定初始相位偏移，用于对齐不同门之间的相位零点。

在实际线路执行时，编译器只需跟踪每个离子上的相位框架，并在每次门开始时将累计补偿项写入对应脉冲的初相位中，即可实现门序列的连续拼接。

单比特 AC Stark shift 的标定线路：为在实验上标定单比特 Raman 门中的平均 AC Stark shift，可采用由 π_x 脉冲与 $-\pi_x$ 脉冲组成的循环序列。理想情况下，一个 π_x 脉冲与一个 $-\pi_x$ 脉冲的组合应等效于恒等操作；然而当存在小失谐 δ 时，单次循环会产生一个绕 y 轴的小旋转。对 $|\delta| \ll \Omega$ 的情形，一阶近似下该旋转角可写为：

$$\alpha \simeq \frac{4\delta}{\Omega}. \quad (7.6)$$

因此，若将该循环重复 N 次，则总附加旋转角近似为 $N\alpha$ 。实验上通过测量末态布居随 N 的变化并拟合，即可提取平均差分 AC Stark shift。

两比特 MS 门的 AC Stark shift 标定线路：实验上可采用连续两个 MS 门的相位扫描方法：固定第一个 MS 门相位，扫描第二个 MS 门相位，并通过末态布居或 parity oscillation 的峰值位置提取两门之间的相对相位偏移。将这一偏移记为 Φ_{MS} ，则相应的平均有效光移可写为：

$$\bar{\delta}_{\text{MS}} = \frac{\Phi_{\text{MS}}}{\tau_g}, \quad (7.7)$$

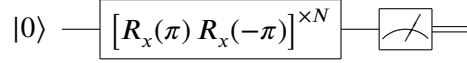


图 7.3 单比特 AC Stark shift 标定线路示意。将 $R_x(\pi)$ 与 $R_x(-\pi)$ 组成一个基本循环，并重复执行 N 次。若存在残余差分 AC Stark shift，则单次循环不再严格等效于恒等变换，而会积累一个绕 y 轴的小旋转；通过拟合末态布居随循环次数 N 的变化，可以提取平均差分光移。

其中 τ_g 为单个 MS 门的门时长。对于调制 MS 门，AC Stark shift 一般是含时量；理想补偿应使驱动频率在门作用过程中实时跟踪瞬时光移。出于参数设置与运行时实现的简洁性考虑，本文在实验中统一采用平均意义下的有效光移进行补偿。

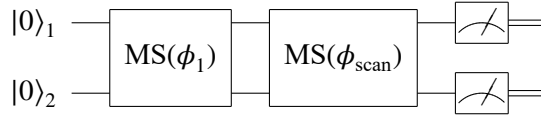


图 7.4 两比特 MS 门 AC Stark shift 标定线路示意。固定第一个 MS 门相位 ϕ_1 ，扫描第二个 MS 门相位 ϕ_{scan} ，由输出布居或 parity oscillation 的峰值位置提取两门之间的相对相位偏移，并据此反推出第一个 MS 门作用期间累计的有效 AC Stark shift 相位。

表 7.2 离子比特单比特门与两比特 MS 门对应的 AC Stark Shift 参数（单位：Hz）。表中对角项表示各离子比特上单比特门的 AC Stark Shift；非对角项第 i 行第 j 列对应实施离子 i 与离子 j 的两比特门时，在离子 i 上产生的 AC Stark Shift。在实验精度内，无法分辨 MS 门在两个离子上产生的 AC Stark Shift 的差异。

离子编号	1	2	3	4	5
1	413	-185	-223	-149	-185
2	-185	412	-221	-206	-134
3	-223	-221	431	-213	-203
4	-149	-206	-213	442	-155
5	-185	-134	-203	-155	439

两比特门中的相位处理与 R_{zz} 编译：当离子 i 和 j 上执行一次 MS 门后，相位框架更新为：

$$\phi_i^{\text{frame}} \leftarrow \phi_i^{\text{frame}} + \Delta\phi_i^{\text{MS}}, \quad \phi_j^{\text{frame}} \leftarrow \phi_j^{\text{frame}} + \Delta\phi_j^{\text{MS}}, \quad (7.8)$$

其中 $\Delta\phi_i^{\text{MS}}$ 与 $\Delta\phi_j^{\text{MS}}$ 由预先标定得到。相应标定方法如图 7.5 所示：先施加 $R_x(\pi/2)$ ，再扫描 $\text{MS}(\pi/2, \phi)$ 的相位，并由输出态中 $|00\rangle$ 布居的变化反推出 MS 门相对于单

比特参考相位的偏移量。

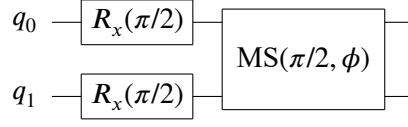


图 7.5 通过在两个量子比特上先施加 $R_x(\pi/2)$ ，再扫描 $MS(\pi/2, \phi)$ 的相位，并由 $|00\rangle$ 态布居反推出 MS 门相对于单比特参考相位的偏移量，用于运行时相位追踪。

相较于单比特门， MS 门的波形参数计算更复杂；同时，参与该门的两个离子在门前经历的操作历史通常也并不相同，因此即便是同一类 MS 门，在不同线路位置上也往往需要写入新的局域相位补偿。为简化线路编译，本文在逻辑门层使用 R_{zz} 作为固定角度两比特门表示，并将原生 R_{xx} 操作通过单比特基变换改写为：

$$R_{zz}(\theta) = \left[R_y^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] R_{xx}(\theta) \left[R_y^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (7.9)$$

若定义局域相位框架为：

$$U_Z(\varphi_i, \varphi_j) = \exp\left[-\frac{i}{2} (\varphi_i Z_i + \varphi_j Z_j)\right], \quad (7.10)$$

则有：

$$U_Z(\varphi_i, \varphi_j) R_{zz}(\theta) U_Z^\dagger(\varphi_i, \varphi_j) = R_{zz}(\theta). \quad (7.11)$$

也就是说， R_{zz} 与局域 Z 相位框架对易。因而，在线路编译时无须显式回溯该门操作之前已累计的所有局域 Z 相位并重新定义 R_{zz} 本身；只需保证其分解内部单比特旋转与 MS 波形之间的相对相位正确，并把各离子的相位补偿分别写入相应局域脉冲即可。

表 7.3 MS 门与单比特门操作的初始相位差矩阵（单位：rad）。表中第 i 行第 j 列表示两比特门 $MS(i, j)$ 相对于第 i 个离子单比特门操作的初始相位差；在实验精度内，无法观察到 MS 门与两个离子的单比特门相位差有区别。

离子编号	1	2	3	4	5
1	\	-0.080	-0.107	-0.121	-0.091
2	-0.080	\	-0.088	-0.120	-0.085
3	-0.107	-0.088	\	-0.136	-0.148
4	-0.121	-0.120	-0.136	\	-0.148
5	-0.091	-0.085	-0.148	-0.148	\

7.1.3 关键参数校准更新策略

量子计算系统并不仅运行单个量子门或短线路实验。在执行如 QV 这类深度较大、重复次数很多且运行时间较长的实验时，系统参数漂移往往会比单次门标定更突出。温度变化、机械应力释放与电子学漂移会引起离子位置、Raman 光强、模式频率与 AC Stark shift 的缓慢变化，从而使线路保真度在长时间运行中逐步下降。因此，校准策略的目标并不是穷尽性追踪所有底层物理参数，而是建立一组面向线路执行的关键参数，并通过运行时闭环保证这些参数始终维持在允许范围内。

在本文的软件框架中，每个关键参数除数值外，还包含其来源、更新时间、适用对象、允许漂移范围与依赖关系。于是，如图 7.1 所示，在每个 point 正式执行前，系统会进行参数有效性检查：若参数仍在有效期内且处于容差范围，则直接进入脉冲生成；若某个参数已过期或超限，则由时序层自动插入对应校准程序；若校准程序依赖其他参数，则继续触发基础校准；若多轮修复后参数仍不满足要求，则中止本次实验并报错。这样，诸如“Calibration A 需要先调用 Calibration B”的依赖关系可自然体现在调度图中，同时由于校准检查发生在 point 之间而非整批数据结束之后，系统能够以更细粒度抑制漂移对高精度实验的影响。

除门直接相关的参数更新外，系统还需保持平台处于可运行状态，其中重要一项是对离子链状态进行在线监测。表 7.4 给出了长时间运行中使用的一组基本离子状态判别与处理逻辑。

表 7.4 长时间实验中离子状态的基本监测与处理逻辑。该表用于在运行时快速判定是否需要离子重构、重新加载或恢复 RF 条件。

观测现象	处理方法
一维离子晶体存在且离子数目正确	保持当前运行状态，不触发额外处理。
PMT 计数高于无离子背景，但 CCD 上无明显离子荧光	短时打开离子化光，并暂时降低 RF 功率后恢复，以提高重新捕获概率。
离子链中出现暗离子或链结构明显异常	暂时关闭 RF，随后重新加载离子并恢复到目标离子数。

声子频率更新：

声子模式频率漂移会直接影响 MS 门失谐条件与调制波形，因此是最重要的全局参数之一。实验上可通过蓝边带 Ramsey 或边带谱扫描对相关模式频率进行更新，其复杂度随离子数近似为 $O(n)$ 。在采用 smooth gate 调制方案并结合射频稳定性（数小时内典型漂移不超过 ~ 30 ppm）的条件下，一般实验周期内可显著降低对频繁更新的需求。

离子位置与寻址更新：

离子位置漂移会同时影响 AOD/AOM 寻址频率、Raman 光强分布以及由此决定的有效 Rabi 频率。本文采用线性复杂度的逐离子寻址更新策略：读取历史地址作为初值，逐离子执行 AOD 频率扫描/荧光判据扫描得到新的最佳寻址频率，并将结果写回参数表。由于离子索引、AOD 地址与实验对象之间的对应关系被显式记录，同一套编译与调度逻辑可兼容离子数目的切换，而无需重写底层时序。

单比特门振幅更新：

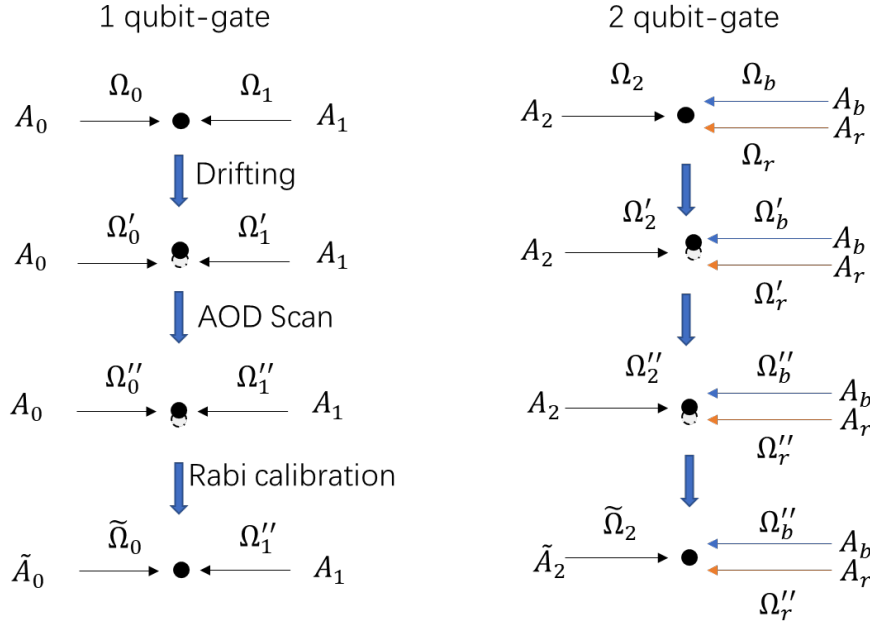


图 7.6 线性复杂度 ($O(n)$) 校准策略示意图。通过把关键漂移参数映射到一组可快速更新的标定量，可在长时间运行中持续把单比特与两比特门参数维持在容差范围内。

对于单比特 Raman 载波门，可将门面积稳定性的要求归结为左右两束 Raman 光耦合强度乘积的稳定。设全校准完成后两侧 Raman 光对应的等效 Rabi 因子分别为 Ω_0 与 Ω_1 ；当离子位置漂移并通过 AOD 重新寻址后，它们变为 Ω''_0 与 Ω''_1 。若通过调节左侧 AOM 振幅将其修正为 $\tilde{\Omega}_0$ ，则单比特门的保持条件可写为：

$$\tilde{\Omega}_0 \Omega''_1 = \Omega_0 \Omega_1. \quad (7.12)$$

为便于后续调用，定义单比特门校准因子：

$$c^{(i)} \equiv \frac{\tilde{A}_0^{(i)}}{A_0^{(i)}} \simeq \frac{\tilde{\Omega}_0^{(i)}}{\Omega_0^{(i)}}, \quad (7.13)$$

其中 $A_0^{(i)}$ 与 $\tilde{A}_0^{(i)}$ 分别表示离子 i 在校准前后的左侧 AOM 振幅设定。该因子被写入参数表后，可供同一离子参与的两比特门更新直接复用。

两比特门参数更新：

若对每一对离子都重新做完整两比特门扫描，则复杂度通常为 $O(n^2)$ ，在多离子长时间运行中代价过高。为此，本文利用单比特门更新结果对两比特门参数进

行快速修正。设两比特门公共 Raman 臂对应的振幅为 A_2 ，其更新值为 $\tilde{A}_2$ ；对离子 i 与 j ，在“共享光路漂移可用乘性修正近似描述”的前提下，可用单比特门校准因子的几何平均估计两比特门公共振幅修正：

$$\frac{\tilde{A}_2^{(i,j)}}{A_2^{(i,j)}} \equiv d^{(i,j)} \approx \sqrt{c^{(i)}c^{(j)}}. \quad (7.14)$$

该策略的关键不在于完全取代精确两比特门标定，而在于为长时间线路运行提供一种足够快、足够稳的运行时更新机制；当快速更新仍不能满足阈值要求时，系统再退回到完整的两比特门校准流程。

综上，本节给出了服务于长时间线路执行的分层编译与运行时校准框架。其关键不在于实时重建所有底层物理量，而在于把决定线路质量的少数关键参数持续维持在容差范围内，并将门序列相位拼接、参数更新与底层波形生成统一纳入闭环之中。这样，前几章建立的高保真单/双比特门能力才能在 GHZ 与 QV 这类中等深度线路中被稳定调用。

7.2 5 比特 GHZ 纠缠态制备

GHZ 态是检验多体非经典相关的重要目标态^[171-172]。为检验前述分层编译、相位拼接与运行时参数维护是否已经能够支撑真实的多比特量子线路，本工作首先选择 5 比特 GHZ 态作为系统级验证对象。该线路同时包含单比特叠加制备、连续四次两比特纠缠扩展以及末态的全局相干分析，因此能够较直接地反映串行门调用条件下多比特相干是否得到保持。

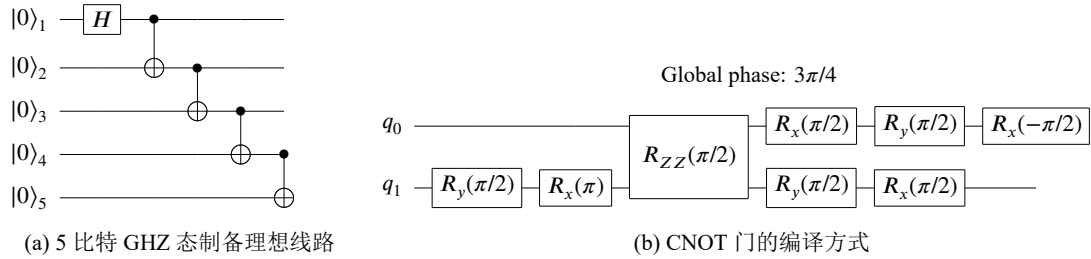


图 7.7 5 比特 GHZ 态制备线路及其中 CNOT 门的编译方式。 (a) 首先在第一个量子比特上施加 Hadamard 门制备叠加态，随后依次施加四个 CNOT 门，将纠缠扩展到 5 个量子比特，最终得到 $|\text{GHZ}_5\rangle = (|00000\rangle + |11111\rangle)/\sqrt{2}$ 。 (b) 右图给出了单个 CNOT 门的编译线路：将其分解为单比特旋转与一个 $R_{ZZ}(\pi/2)$ 门的组合，整体忽略全局相位 $3\pi/4$ 。

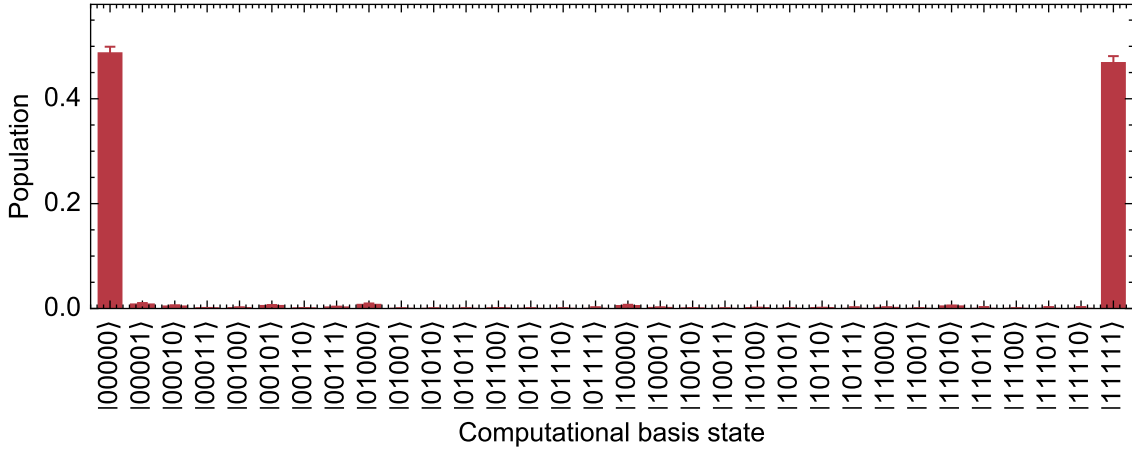


图 7.8 5 比特 GHZ 态制备后的 32 个计算基布居测量结果。可以看到， $|00000\rangle$ 与 $|11111\rangle$ 两个端点态的布居明显占优，而其余计算基态布居被显著抑制，表明多比特相干叠加已经建立。

实验中，先将五个离子经光抽运初始化到 $|0\rangle^{\otimes 5}$ ；随后在第一个离子上施加等效于 Hadamard 的单比特旋转，再依次作用四次两比特纠缠门，将相干逐步扩展到整个 5 比特寄存器，目标态为：

$$|\text{GHZ}_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00000\rangle + |11111\rangle). \quad (7.15)$$

图 7.8 给出了最终态在 32 个计算基上的布居分布。经读出误差缓解后， $|00000\rangle$ 与 $|11111\rangle$ 的布居分别为：

$$P_{00000} = 0.487(12), \quad P_{11111} = 0.469(13),$$

两端态总布居达到：

$$P_{00000} + P_{11111} = 0.956(7).$$

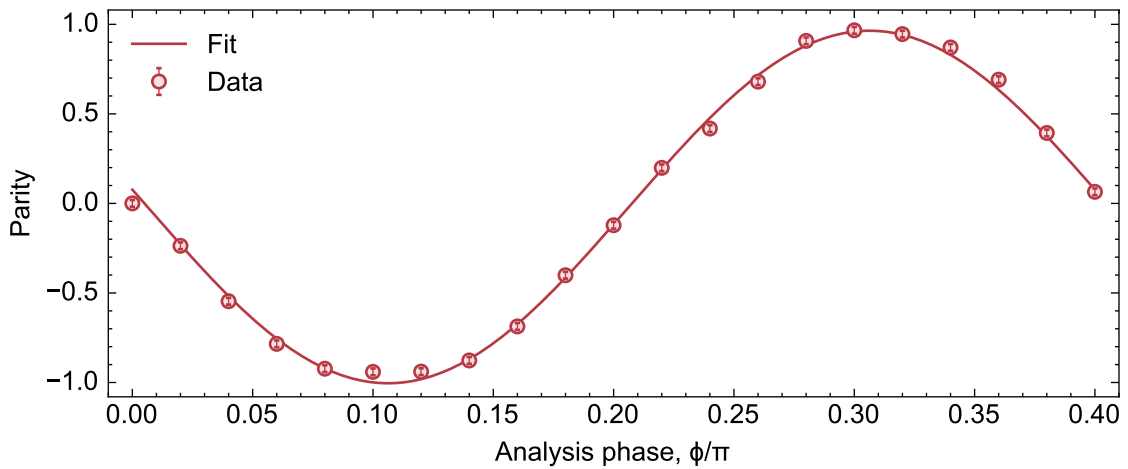


图 7.9 5 比特 GHZ 态的 parity oscillation 实验结果。对全体离子施加分析 $\pi/2$ 脉冲并扫描相位 ϕ ，奇偶算符期望值拟合为 $\Pi(\phi) = A \cos(5\phi + \phi_0) + B$ ；本文报告的是振幅 A 而非峰峰值 $2A$ 。

为提取两端分量之间的多体相干项，在态制备完成后，对全部离子施加分析脉冲 $R(\pi/2, \phi)^{\otimes 5}$ ，扫描相位 ϕ 并测量奇偶算符：

$$\Pi(\phi) = \left\langle \prod_{i=1}^5 Z_i \right\rangle. \quad (7.16)$$

对于理想 5 比特 GHZ 态，奇偶信号可写为：

$$\Pi(\phi) = A \cos(5\phi + \phi_0) + B, \quad (7.17)$$

其中 A 为拟合振幅，并满足：

$$A = 2 |\rho_{00000,11111}|.$$

由图 7.9 的拟合结果得到：

$$A = 0.984(6).$$

因此，GHZ 态保真度可写为：

$$F_{\text{GHZ}} = \langle \text{GHZ}_5 | \rho | \text{GHZ}_5 \rangle = \frac{P_{00000} + P_{11111} + A}{2} = 0.970(6). \quad (7.18)$$

不确定度的具体推导与读出误差缓解后的误差传播过程不再在本节重复展开，相关原理分别见第 3.4.3 节和第 5.3.3 节。这里仅说明结果的构成：**population** 项的不确定度来自有限 shots 的多项统计涨落以及读出混淆矩阵有限校准误差的传播；**parity** 项的不确定度来自式 (7.17) 的拟合统计误差及同样的读出校准误差传播。对于第 i 个量子比特，单比特读出混淆矩阵写为：

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{0,i} & \epsilon_{1,i} \\ \epsilon_{0,i} & 1 - \epsilon_{1,i} \end{pmatrix},$$

其中每个误差参数均由 10^4 次 histogram 测量得到。对于本实验而言，5 个量子比特的具体测量误差参数 $(\epsilon_{0,i}, \epsilon_{1,i})$ 分别为：

$$\begin{aligned} q_1 &: (0.0126(11), 0.0322(18)), \\ q_2 &: (0.0112(11), 0.0306(17)), \\ q_3 &: (0.0106(10), 0.0370(19)), \\ q_4 &: (0.0109(10), 0.0497(22)), \\ q_5 &: (0.0121(11), 0.0445(21)). \end{aligned}$$

5 比特 GHZ 态的保真度受多种因素限制。相比单门操作，线路实验会额外引入线路级累积效应，即连续 MS 门及单比特旋转的误差叠加；此外，多比特读出会放大 SPAM 误差及有限采样统计噪声，通过逆混淆矩阵和最大似然法可部分缓解，但测量结果仍有 1% 量级的不确定度。第六章实验表明，Raman 驱动的单比特门平均保真度可达 0.99986(2)，两比特 MS 门平均保真度约在 0.99 水平，GHZ 制备需

连续调用四次 MS 门，因此可知，两比特门误差仍然是线路操作精度的主要限制因素。

综上，5 比特 GHZ 态的高保真制备表明，前述相位拼接与运行时校准策略能够在连续多次两比特门作用后仍保持较高的多体相干性，也说明系统已经具备从门级高保真操作进一步过渡到中等深度量子线路执行的能力。

7.3 系统 QV32 验证

7.3.1 量子体积 (Quantum Volume) 基本定义

量子体积 (Quantum Volume, 记为 V_Q) 旨在以单一数字综合刻画量子处理器在“中等深度通用量子线路”上的可执行能力。其定义基于一类宽度与深度相等 (均为 m) 的随机模型线路 (randomized model circuits)。对每个给定实例，先在理想 (无噪声) 模拟下得到输出分布 $\{p_x^{\text{ideal}}\}$ ，以其中位数概率 p_{med} 定义重输出集合 (heavy set)：

$$\mathcal{H} = \{x \mid p_x^{\text{ideal}} > p_{\text{med}}\}. \quad (7.19)$$

在真实设备上采样得到计数 n_x ($\sum_x n_x = N_{\text{shots}}$) 后，单实例重输出 (heavy-output) 概率定义为：

$$h = \frac{1}{N_{\text{shots}}} \sum_{x \in \mathcal{H}} n_x. \quad (7.20)$$

对 N_{cir} 个随机线路实例取平均得到 $\bar{h}$ 。记所选统计置信区间的下界为 $\bar{h}_{\text{LB}}$ ，若：

$$\bar{h}_{\text{LB}} > \frac{2}{3}, \quad (7.21)$$

则认为该 $m \times m$ 规模通过测试，并定义 $V_Q = 2^m$ (取能够通过的最大 m 作为报告的 QV)^[9]。

7.3.2 QV 测量协议及物理意义

随机模型线路生成与编译：

按照 QV 协议，每一层先对 qubit 做随机配对 (随机置换)，再对每个配对施加从 SU(4) Haar 分布抽样的两比特幺正块；在实际硬件上，这些幺正块会被分解到原生门集并进一步做硬件感知优化^[9,165]。本工作使用 Qiskit 生成等价层结构，并将两比特块在编译阶段分解为本地门集 (见式 (7.1))，最终由 ARTIQ 执行点/shot 序列。

统计判据与误差条：

为避免有限采样导致的误判，QV 协议要求对 $\bar{h}$ 给出统计不确定度 (例如 bootstrap 置信区间)，并以 $\bar{h}_{\text{LB}} > 2/3$ 作为通过判据^[9]。在本工作中，我们固定采用

$N_{\text{cir}} = 100$ 、 $N_{\text{shots}} = 400$ 的统计模板，并对 100 个随机线路实例的重输出概率做 bootstrap 重采样，以给出 $\bar{h}$ 的置信区间与样本间波动。

QV 主要刻画可执行的有效逻辑深度，能够以较低成本暴露线路级瓶颈。需要指出的是，QV 偏向选择最优 qubit 子集，且不直接测量误差的空间/时间相关结构，因此在面向更复杂的量子线路时，仍需与门级误差预算和结构化线路测试互补^[162]。

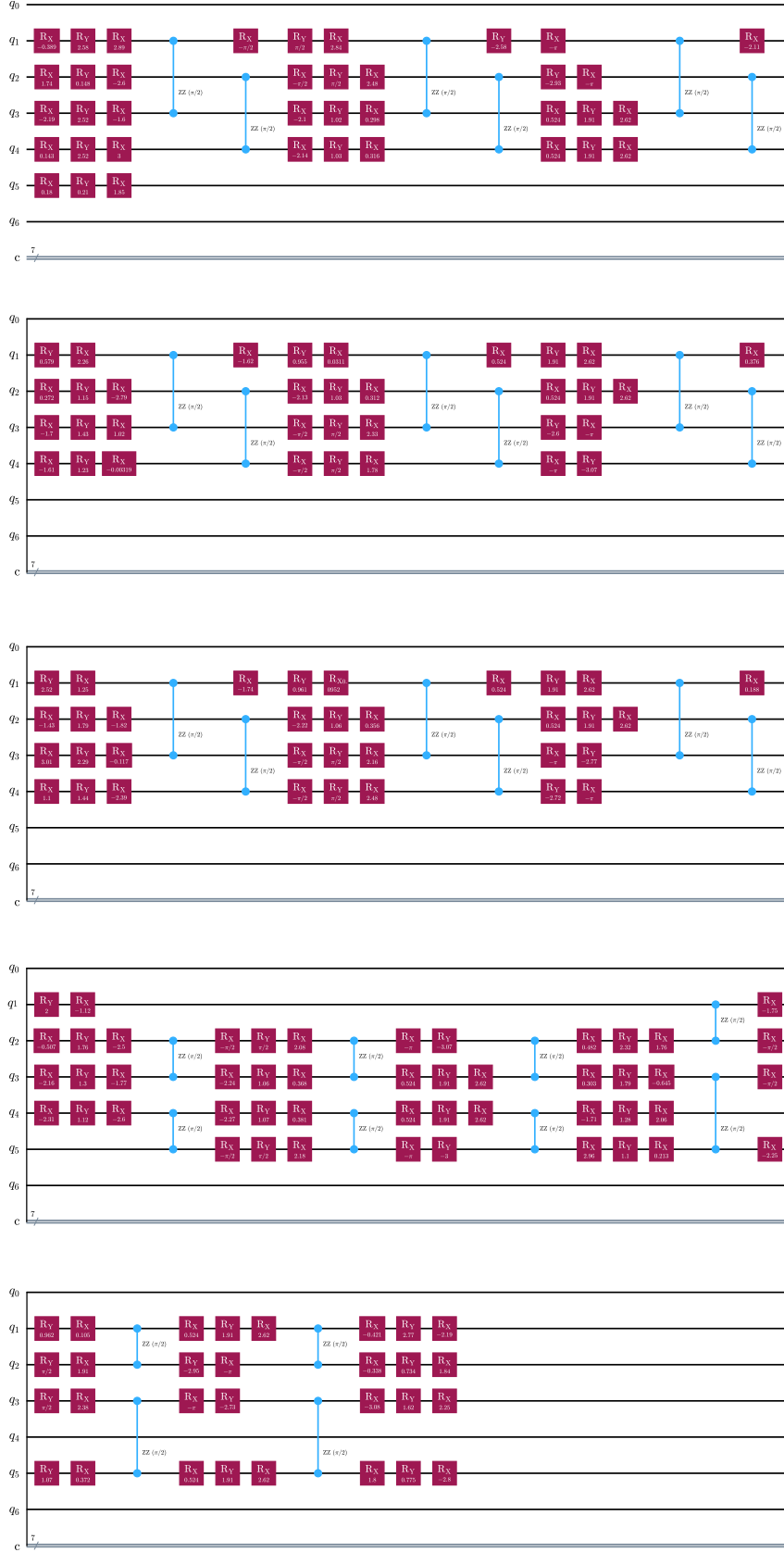


图 7.10 实际测试过程中使用的一组 QV32 编译后线路示例。图中展示了随机两比特块在本平台本地门集 $\{R_x, R_y, R_{zz}(\pi/2)\}$ 下翻译后的门序列形态，可直观看到随机线路在门级上的展开深度与相位拼接复杂度。

7.3.3 QV 实验结果与讨论

为了验证系统能否通过 QV32 测试，我们在 7 个离子中选取中间的 5 个离子量子比特作为测试子系统。遵照量子体积 (QV) 协议，我们随机生成了测试线路集合 ($N_{\text{cir}} = 100$, $N_{\text{shots}} = 400$)，并交由测控系统执行以收集测量结果。

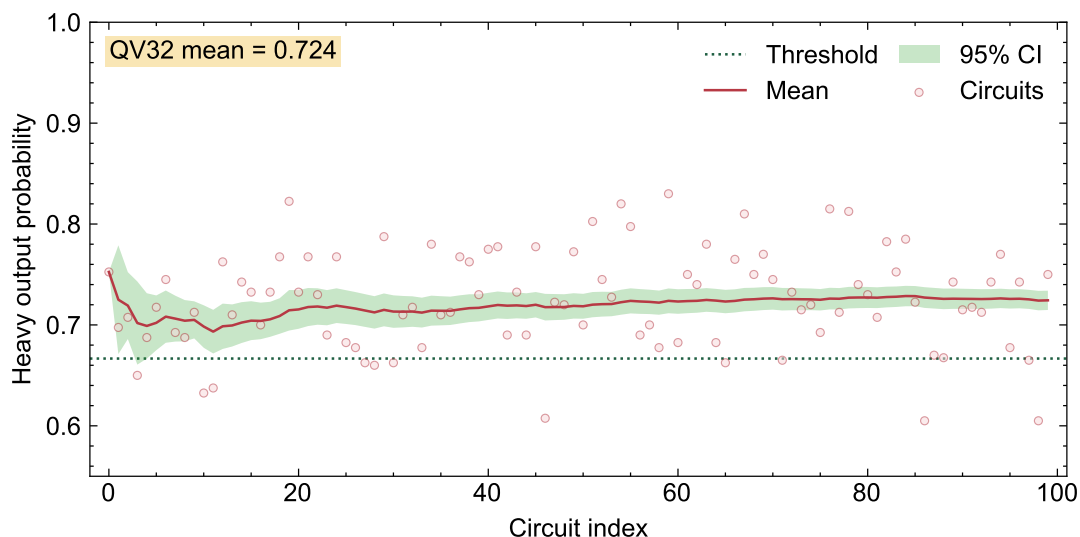
实验数据表明 (图 7.11)，在未采用和采用错误缓解 (error mitigation) 技术的情况下，系统得到的平均重输出 (heavy-output) 概率分别为 $\bar{h} = 0.724(11)$ 和 $\bar{h} = 0.754(12)$ ，均显著高于 $2/3$ 的协议阈值。进一步对 100 个随机线路实例进行 bootstrap 重采样分析，结果显示其置信区间下界依然严格保持在阈值之上，由此证实本系统成功通过了 QV32 测试。

这一结果表明，在该 5 比特子系统上，本平台能够在深度 $m = 5$ 且包含随机两比特块的线路中，稳定维持相位一致性、门参数标定及运行时的闭环控制，从而成功将门级的高保真度转化为系统级的线路执行能力。

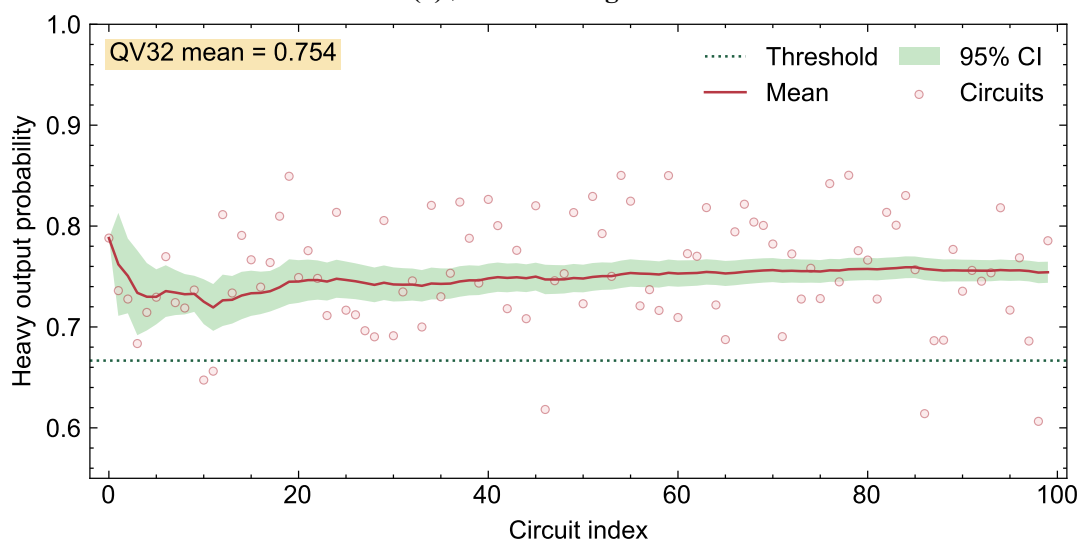
进一步地，可用全局去极化近似把 HOP 与门保真度作定量关联。对于 QV 随机线路，理想 heavy-output 概率约为 $h_{\text{ideal}} = (1 + \ln 2)/2 \simeq 0.8466$ ；若线路中包含 $N_1(m)$ 个单比特门和 $N_2(m)$ 个两比特门，并近似认为各门误差独立累积，则平均 HOP 可写为^[9,104,113,162]

$$\bar{h}_m \simeq \frac{1}{2} + \left(h_{\text{ideal}} - \frac{1}{2}\right) \eta_m F_1^{N_1(m)} F_2^{N_2(m)} \simeq \frac{1}{2} + \left(h_{\text{ideal}} - \frac{1}{2}\right) \eta_m e^{-N_1(m)r_1 - N_2(m)r_2}. \quad (7.22)$$

其中 F_1 与 F_2 分别为单比特 Raman 门和两比特 MS/ R_{zz} 门平均保真度， $r_i = 1 - F_i$ ； η_m 用于吸收读出残余误差、串扰、空闲退相干、相干标定误差以及长时间漂移等非单门误差贡献。代入本实验 QV32 结果 $\bar{h}_5 = 0.754$ ，可得等效线路因子 $\eta_5 F_1^{N_1(5)} F_2^{N_2(5)} \simeq 0.733$ 。结合当前 $F_1 \simeq 0.99986$ 、 $F_2 \simeq 0.9948$ 可见，QV32 的 HOP 主要受两比特门及其相关的相位、串扰和漂移误差限制，单比特门误差的贡献相对较小。若希望在 QV64/QV128 中保持与当前 QV32 相近的 HOP 裕量，则在单比特门维持 $F_1 \gtrsim 0.99986$ 的前提下，两比特门平均保真度需大致提高到 $F_2^{\text{QV64}} \gtrsim 0.9973$ 和 $F_2^{\text{QV128}} \gtrsim 0.9978$ 。因此，后续更稳健的目标是将单比特门稳定维持在 99.99% 左右，同时把 5 比特子系统内所有离子对可用的两比特 MS 门保真度提高至 99.7% ~ 99.8% 区间。



(a) 无 error mitigation



(b) 有 error mitigation

图 7.11 QV32 测试的重输出 (heavy-output) 统计结果。图 (a) 为无 error mitigation 的结果，图 (b) 为有 error mitigation 的结果。散点表示各随机线路实例的重输出概率，红线表示累计平均值，阴影表示对 100 个随机线路实例数据做 bootstrap 后得到的 $\bar{h}$ 统计不确定度范围，虚线对应协议阈值 $2/3$ 。

与其他平台公开结果的比较：

多个平台已将 QV 推进到高于本文的量级。表 7.5 汇总了截至 2026 年 3 月可公开核验的代表性 QV 记录^[173-176]。需要说明的是，IonQ 近年来更多使用 #AQ 而非 QV 作为系统指标，因此将其列入表 7.6 中讨论^[177-178]。

除 QV 外，error per layered gate (EPLG) 与 LR-QAOA 等也是近年常用的系统级基准测试 (benchmark)，分别关注并行两比特层质量与算法驱动的宽度-深度扫描能力^[9,179-181]。表 7.6 汇总了主流平台的代表性结果。

表 7.5 主要团队可核验公开量子体积（Quantum Volume, QV）记录（截至 2026 年 3 月）。

国家/地区	QV	公布时间	体系	团队
中国（本工作）	2^5	2026 年 3 月	离子阱	USTC
美国/英国	2^{25}	2025 年 9 月	离子阱	Quantinuum ^[173]
美国	$512 (= 2^9)$	2022 年	超导	IBM ^[176]
奥地利	$128 (= 2^7)$	2023 年	离子阱	AQT ^[174]
芬兰	$64 (= 2^6)$	2025 年	超导	IQM ^[175]

表 7.6 QV 以外的代表性系统级基准测试（benchmark）及其公开最大有效线路规模/层级质量结果。

国家/地区	指标	公布时间	体系	团队	指标实现说明
美国/英国	LR-QAOA (FC)	2025 年	离子阱	Quantinuum ^[180]	56 比特, 约 4620 个两比特门（公开成功 FC 规模）
美国	LR-QAOA (FC)	2025 年	离子阱	IonQ Forte Enterprise ^[180]	28 比特, 约 1134 个两比特门
美国	LR-QAOA (FC)	2025 年	超导	IBM Fez ^[180]	20 比特, 约 1710 个 CZ 门
芬兰	LR-QAOA (FC)	2025 年	超导	IQM Garnet ^[180]	12 比特
美国	EPLG	2026 年	超导	IBM Boston ^[182]	best EPLG $\approx 2.15 \times 10^{-3}$ (100 qubits), 用于表征大规模并行两比特层的平均质量
美国	#AQ	2025 年	离子阱	IonQ Tempo ^[177]	#AQ 64 (IonQ 主推的单值系统指标, 非 QV)

面向 FTQC 的改进方向:

当前 QV 主要受限于门误差、读出误差、离子加热与退相干以及长时间漂移等因素。进一步提升可从三方面展开:

- 硬件层面:** 进一步降低电场噪声与离子加热率、提升光学/射频链路稳定度, 并通过更高收集效率、更低串扰成像与更高保真读出进一步压低 SPAM 与测量串扰;
- 波形层面:** 优化脉冲整形与鲁棒控制, 提高门对频率漂移、幅度噪声与旁观模扰动的容忍度, 降低相干误差与噪声积累;
- 线路层面:** 改进硬件感知编译与调度（包括相位框架管理、校准插入与在线补偿策略）, 并进一步发展面向中途测量、快速反馈与综合征提取原型线路的结构化基准测试, 以更直接地连接当前线路能力与 FTQC 需求^[11]。

7.4 本章小结

本章完成了 5 比特 GHZ 态制备与量子体积 QV32 的实验验证。首先给出了分层编译与运行时校准框架，通过相位框架管理、AC Stark shift 补偿与线性复杂度的参数更新策略，支撑长时间线路运行。其次在 5 比特上制备 GHZ 态（保真度 97.0(6)%），验证了多比特纠缠线路的正确性。在此基础上严格遵循 QV 协议完成 QV32 测试（ $\bar{h} = 0.754(12)$ ），证明本系统能够在深度 $m = 5$ 的随机模型线路上显著超过 2/3 阈值。最后结合公开基准测试数据讨论了进一步提升系统能力的方向。

本章给出的分层编译、运行时校准与系统级基准验证流程，为后续从 QV 验证迈向逻辑编码与综合征提取实验提供了软件与工程基础。

注：本节涉及的 QV32 实验方案设计、数据采集及分析处理均由本文作者主导完成。鉴于作者在读期间深度参与了合肥么正量子科技有限公司的产学研合作并担任相关技术负责人，本节展示的部分阶段性成果与数据曾作为校企合作技术成果，授权该公司于 2026 年初在媒体端公开发布^[183]。特此声明，本论文展示的所有研究内容与数据均系作者博士学位研究成果的组成部分。

第8章 总结与展望

本文围绕“离子阱高保真寻址量子门与量子线路的实现与表征”这一主线，完成了从离子阱实验平台构建、 $^{171}\text{Yb}^+$ 量子比特基础操控、低串扰 Raman 寻址与高保真单比特/两比特原生门实现，到多比特量子线路编译与系统级基准验证的完整研究。

本章总结全文主要结果，讨论后续优化方向以及面向纠错原型实验的扩展路径。

8.1 本文工作总结

(1) **构建了可稳定运行的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子阱量子计算实验平台。**基于高通光离子阱真空腔体，本文系统完成了射频与直流电子学、基础操控激光、Raman 激光链路、成像探测、温控与磁屏蔽以及测控软件接口等模块的搭建与联调，建立了一套能够稳定囚禁、冷却、初始化、操控和读出的离子阱量子计算平台。高通光几何结构为强聚焦寻址与高效率探测提供了充足的空间条件，而低噪声射频与直流驱动、稳定的锁频链路以及可重复的微运动补偿流程，则共同保证了高保真度量量子门实验所需的长期稳定工作环境。基础表征表明，射频功率稳定度达到 $28\text{ ppm}@13\text{ h}$ ，平台内部温度在数天量级连续运行中波动控制在 0.04°C 以内，微波单比特门平均保真度达到 $99.9974(4)\%$ 。

(2) **实现了基于对称 AOD 构型的低串扰 Raman 寻址体系。**本文设计并搭建了基于对称 AOD 构型的双侧 Raman 寻址系统，在目标离子处形成重叠的紧聚焦光斑，从而显著抑制旁观离子的非期望驱动。实验表明，相邻离子之间的 Rabi 频率串扰达到约 10^{-3} 水平。

(3) **实验实现并标定了高保真量子门。**围绕 Raman 单比特门与两比特 MS 门，本文系统分析了 AC Stark shift、边带不平衡、相空间不闭合、退相干以及参数漂移等主要误差来源，并结合声子谱、加热率、相干时间等实验量进行了逐项标定。建立并实验标定了远失谐 Raman/MS 门的误差分析与 RB/CRB 表征框架，最终实现 Raman 单比特门的 RB 平均保真度达到 $99.986(2)\%$ ，两比特 MS 门的 CRB 平均保真度达到 $99.48(23)\%$ ；并在 5 比特子系统中实现了所有离子对的全连通 MS 纠缠操作，Bell 态保真度达到 $98.6(3)\% - 100.0(3)\%$ 。这些结果表明，本文所建立的门级系统已具备较高精度的局域操控能力和较强的多离子纠缠可达性。

(4) **将高保真度原生门进一步落实为系统级量子线路能力并通过 QV32 验证。**在门级能力基础上，本文进一步建立了支持多比特量子线路的分层测控与编译框架，

解决了门序列相位拼接、AC Stark shift 补偿与参数在线更新等问题，并完成了 5 比特 GHZ 态制备和 QV32 验证。其中，五比特 GHZ 态的测得保真度为 97.0(6)%，QV32 实验的重输出（heavy-output）平均概率达到 0.754(12)，超过 2/3 判据。这些结果表明低串扰寻址与高保真原生门已能够在真实量子线路中稳定运行。

8.2 工作优化方向

若要从当前 5 比特级量子线路走向更大规模乃至与量子纠错相关的实验任务，仍需在门级精度、寻址质量和系统运行能力等方面持续优化。

(1) 进一步提高两比特门保真度与迈向更高量子体积 (QV)。两比特 MS 门仍然是限制线路深度的关键瓶颈，距离更高性能容错接口所期望的约 99.9% 水平仍有提升空间；GHZ 与 QV32 的实验经验表明，限制线路运行的不仅是静态门保真度，还包括参数漂移、校准时长和软件接口的摩擦成本。从量化角度分析，若要从当前的 QV32 迈向 QV64 ($m = 6$) 甚至 QV128 ($m = 7$)，由于随机模型线路中包含的两比特逻辑门数量随 m^2 加速增长，要求系统平均两比特门保真度需分别稳定跨越 99.7% 和 99.8% 的门槛。结合第 6 章误差预算，后续优化可围绕以下几项展开：降低声子加热率并提高运动相干时间；提高门模式频率的长期稳定度与在线跟踪能力；降低 Raman 光强波动、相位漂移以及红蓝边带不平衡；结合平滑包络门（smooth gate）等波形整形方法提高门操作的鲁棒性；同时完善闭环自动化能力，如在测控软件层引入更密集的隐式背景校准（background calibration），实现长时运行时的误差无缝追踪与动态补偿。

(2) 进一步提高寻址与读出质量。对多离子线路而言，荧光读出误差不仅表现为单离子亮/暗态误判，还可能通过成像串扰、MC-PMT 通道串扰以及探测光引起的非目标散射影响多比特输出分布。本文在 Bell/GHZ 保真度与 QV 分析中采用混淆矩阵与读出误差缓解方法降低该影响，但该方法仍属于后处理修正，不能替代面向纠错循环所需的低串扰中途测量。低串扰寻址是本文系统的重要优势，但仍有持续提升空间。一方面，可通过提高 Raman 物镜数值孔径、降低像差并优化波前质量，把目标光斑进一步压向衍射极限，同时减小对旁观离子的强度溢出；另一方面，可结合更高线性度的射频放大链路和更严格的 AOD 多音频管理，进一步抑制 IMD 引起的附加光斑串扰。对读出端而言，后续还需在中途测量、状态复位、测量诱导串扰和判决延迟等方面实现更可控的工程化性能，以满足未来针对逻辑比特操作时，综合征提取对辅助比特非破坏性测量与快速复位的要求。

(3) 拓展迈向更大规模比特数。随着离子数进一步增加，一维离子链中的径向/轴向运动模谱会逐渐变密，MS 门同时满足目标模式几何相位积累、旁观模式相空间闭合以及红蓝边带平衡的参数窗口将明显收窄；同时，AOD 多音频驱动所需的频

率通道数增加，也会放大互调失真（IMD）与寄生光斑带来的串扰风险。因而，多比特扩展并不仅是增加离子数的问题，还需要同时提高运动模频率的在线跟踪精度、AOD 射频链路线性度、多模 smooth-gate 波形优化能力以及运行时校准效率。本文已经建立了 $O(n)$ 量级的离子位置、寻址与单比特门参数更新框架；后续若要支撑更大规模线路，还需要把该框架进一步推广到多模门波形选择、批量门参数复用和后台隐式校准中。同时，将一维离子链进一步升级到二维离子晶体（2D Ion Crystal）或量子电荷耦合器件（QCCD）架构，则分别代表了离子阱规模化的两条重要方向：前者强调更高的比特密度与并行寻址空间，后者强调通过分区与搬运实现数据比特和辅助比特的功能分离^[35,92,131,184]。就本文使用的宏观刀片阱平台而言，虽然其电极构型并非专为 QCCD 复杂的结区（Junction）穿梭所设计，但本工作开发的分层编译软件框架、基于相位的波形追踪机制以及 Raman 光学底层模块，可完全兼容并无缝迁移到具有多段微电极的表面阱（Surface-electrode trap）平台。此外，针对二维离子晶体架构，本平台的大数值孔径与高通光设计具有天然的兼容优势。在实验上，只需调节刀片电极的直流偏置，改变横向与轴向的束缚频率比例（使 $\omega_z > \omega_{x,y}$ ），即可在当前真空腔内直接形成结构稳定的薄膜型二维离子晶体（ion planar crystal）。同时，双侧对称 AOD 寻址方案亦具备通过替换为二维 AOD 器件，直接平行扩展为二维独立寻址控制的物理潜力。

8.3 离子阱容错量子计算展望

本文已建立起支撑纠错实验的若干底层能力，并完成了从门级性能到线路级验证的过渡；但距离完整的容错架构，仍存在关键接口上的差距，系统仍需补足辅助比特配置、中途测量与快速复位、重复综合征提取以及实时反馈等关键能力^[41-42,185-186]。

此外，本文的误差预算与实验标定结果也可为后续理论噪声模型和纠错码设计提供实验输入。与简单 depolarizing noise 模型不同，本文平台中的主要误差具有明确物理结构：Raman 单比特门误差主要对应 Rabi 频率与 AC Stark shift 漂移；MS 门误差可分解为几何相位偏差、相位零点误差、载波失谐激发、红蓝边带不平衡和声子退相干；AOD 寻址串扰与 IMD 寄生光斑可进一步形成带空间权重的相关误差；读出混淆矩阵则可作为综合征测量错误模型的输入。上述参数可用于构建面向离子阱平台的电路级噪声模型，并为噪声感知译码器提供先验信息。若后续实验显示相位类误差、串扰类误差或读出误差具有明显偏置，则可据此选择或设计更适配该平台的纠错码型、稳定子测量顺序和辅助比特排布。例如，针对偏置噪声可考虑 XZZX 等噪声适配型表面码；针对串扰主导误差，则需在纠错线路调度中引入串扰矩阵约束。由此，本文的实验标定不仅服务于门级优化，也为后

续实验约束的纠错码仿真与新型离子阱纠错原型设计提供了参数基础。

面向未来，容错实验路线可分为四步进行：第一，在当前高保真度单比特门、两比特门和低串扰寻址基础上，完成 $[[7, 1, 3]]$ Steane 码或表面码 (Surface code) 最小基础单元的稳定制备与保真度表征；第二，引入辅助离子并实现中途测量与快速复位能力，完成单轮乃至重复综合征提取，验证纠错循环的基本功能；第三，将门相位跟踪、AC Stark shift 补偿和关键参数运行时更新推广到编码线路与综合征提取循环 (syndrome-extraction cycle) 层面，并把解码器 (decoder) 与判决逻辑接入运行时闭环，确保纠错循环在多轮运行中的稳定性；第四，在更大规模上开展逻辑量子比特存储寿命测试、逻辑 Clifford 门操作或小规模纠错算法实验。

总体而言，本文已将平台推进到可围绕逻辑编码与纠错原型线路开展下一阶段工作的基础上。未来通过进一步提高两比特门稳定性、完善中途测量与前馈反馈网络、拓展纠错逻辑编码能力，本平台有望稳步发展为面向容错量子计算的可扩展实验系统。

参考文献

- [1] FEYNMAN R P. Simulating physics with computers[J/OL]. International Journal of Theoretical Physics, 1982, 21(6–7): 467-488. DOI: 10.1007/BF02650179.
- [2] SHOR P W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer[J/OL]. SIAM Journal on Computing, 1997, 26(5): 1484-1509. DOI: 10.1137/S0097539795293172.
- [3] GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search[C/OL]//Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '96). 1996: 212-219. DOI: 10.1145/237814.237866.
- [4] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [5] PRESKILL J. Lecture notes for physics 219: Quantum computation[R/OL]. California Institute of Technology, 2004[2026-03-18]. <http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>.
- [6] PRESKILL J. Quantum computing in the NISQ era and beyond[J/OL]. Quantum, 2018, 2: 79. DOI: 10.22331/q-2018-08-06-79.
- [7] PERUZZO A, MCCLEAN J, SHADBOLT P, et al. A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor[J/OL]. Nature Communications, 2014, 5: 4213. DOI: 10.1038/ncomms5213.
- [8] FARHI E, GOLDSTONE J, GUTMANN S. A quantum approximate optimization algorithm [A/OL]. 2014[2026-03-18]. arXiv: 1411.4028. <https://arxiv.org/abs/1411.4028>.
- [9] CROSS A W, BISHOP L S, SHELDON S, et al. Validating quantum computers using randomized model circuits[J/OL]. Physical Review A, 2019, 100(3): 032328. DOI: 10.1103/PhysRevA.100.032328.
- [10] Google Quantum AI and Collaborators. Quantum error correction below the surface code threshold[J/OL]. Nature, 2025, 638: 920-926. DOI: 10.1038/s41586-024-08449-y.
- [11] TERHAL B M. Quantum error correction for quantum memories[J/OL]. Reviews of Modern Physics, 2015, 87(2): 307-346. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.307.
- [12] FOWLER A G, MARIANTONI M, MARTINIS J M, et al. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation[J/OL]. Physical Review A, 2012, 86: 032324. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.032324.
- [13] BRUZEWICZ C D, CHIAVERINI J, MCCONNELL R, et al. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges[J/OL]. Applied Physics Reviews, 2019, 6(2): 021314. DOI: 10.1063/1.5088164.

- [14] BERNARDINI F, CHAKRABORTY A, ORDOÑEZ C R. Quantum computing with trapped ions: a beginner's guide[J/OL]. *European Journal of Physics*, 2024, 45(1): 013001. DOI: 10.1088/1361-6404/ad06be.
- [15] FOSS-FEIG M, PAGANO G, POTTER A C, et al. Progress in trapped-ion quantum simulation [J/OL]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2025, 16(1): 145-172. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-032822-045619.
- [16] CHEN Y L, LI R R, HE R, et al. Low-crosstalk optical addressing system for atomic qubits based on multiple objectives and acousto-optic deflectors[J/OL]. *Physical Review Applied*, 2024, 22(5): 054003. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.22.054003.
- [17] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M/OL]. 10th anniversary edition ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CBO9780511976667.
- [18] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions[J/OL]. *Reviews of Modern Physics*, 2003, 75(1): 281-324. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.281.
- [19] CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum computations with cold trapped ions[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(20): 4091-4094. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.4091.
- [20] MØLMER K, SØRENSEN A. Multiparticle entanglement of hot trapped ions[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(9): 1835-1838. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1835.
- [21] BARENCO A, BENNETT C H, CLEVE R, et al. Elementary gates for quantum computation [J/OL]. *Physical Review A*, 1995, 52(5): 3457-3467. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.3457.
- [22] MASLOV D. Basic circuit compilation techniques for an ion-trap quantum machine[J/OL]. *New Journal of Physics*, 2017, 19: 023035. DOI: 10.1088/1367-2630/aa5e47.
- [23] KJAERGAARD M, SCHWARTZ M E, BRAUMÜLLER J, et al. Superconducting qubits: Current state of play[J/OL]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2020, 11: 369-395. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.
- [24] DASU S, DECROSS M, GUO A Y, et al. Computing with many encoded logical qubits beyond break-even[A/OL]. 2026[2026-03-18]. arXiv: 2602.22211. <https://arxiv.org/abs/2602.22211>.
- [25] JIANG Y Y, DENG C, FAN H, et al. Advancements in superconducting quantum computing [J/OL]. *National Science Review*, 2025, 12(8): nwaf246. DOI: 10.1093/nsr/nwaf246.
- [26] WINTERSPERGER K, et al. Neutral atom quantum computing hardware: performance and end-user perspective[J/OL]. *EPJ Quantum Technology*, 2023, 10(1): 32. DOI: 10.1140/epjqt/s40507-023-00190-1.
- [27] GIORDANI T, et al. Integrated photonics in quantum technologies[J/OL]. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 2023, 46: 71-103. DOI: 10.1007/s40766-023-00040-x.
- [28] BURKARD G, LADD T D, PAN A, et al. Semiconductor spin qubits[J/OL]. *Reviews of*

- Modern Physics, 2023, 95: 025003. DOI: 10.1103/RevModPhys.95.025003.
- [29] SAFFMAN M. Quantum computing with neutral atoms[J/OL]. National Science Review, 2019, 6(1): 24-25. DOI: 10.1093/nsr/nwy088.
- [30] BLUVSTEIN D, GEIM A A, LI S H, et al. A fault-tolerant neutral-atom architecture for universal quantum computation[J/OL]. Nature, 2026, 649(8095): 39-46. DOI: 10.1038/s41586-025-09848-5.
- [31] ROMERO M J, MILBURN G. Photonic quantum computing[J/OL]. Oxford Research Encyclopedia of Physics, 2025. DOI: 10.1093/acrefore/9780190871994.013.84.
- [32] STANO P, LOSS D. Review of performance metrics of spin qubits in gated semiconducting nanostructures[J/OL]. Nature Reviews Physics, 2022, 4(10): 672-688. DOI: 10.1038/s42254-022-00484-w.
- [33] KATSUMI R, TAKADA K, JELEZKO F, et al. Recent progress in hybrid diamond photonics for quantum information processing and sensing[J/OL]. Communications Engineering, 2025, 4(1): 85. DOI: 10.1038/s44172-025-00398-2.
- [34] GUO S A, WU Y K, YE J, et al. A site-resolved two-dimensional quantum simulator with hundreds of trapped ions[J/OL]. Nature, 2024, 630: 613-618. DOI: 10.1038/s41586-024-07459-0.
- [35] HOU Y H, YI Y J, WU Y K, et al. Individually addressed entangling gates in a two-dimensional ion crystal[J/OL]. Nature Communications, 2024, 15: 9710. DOI: 10.1038/s41467-024-53405-z.
- [36] KIELPINSKI D, MONROE C, WINELAND D J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer[J/OL]. Nature, 2002, 417(6890): 709-711. DOI: 10.1038/nature00784.
- [37] MONROE C, RAUSSENDORF R, RUTHVEN A, et al. Large-scale modular quantum-computer architecture with atomic memory and photonic interconnects[J/OL]. Physical Review A, 2014, 89(2): 022317. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.022317.
- [38] MOSES S A, BALDWIN C H, ALLMAN M S, et al. A race track trapped-ion quantum processor[J/OL]. Physical Review X, 2023, 13(4): 041052. DOI: 10.1103/PhysRevX.13.041052.
- [39] OSPELKAUS C, WARRING U, COLOMBE Y, et al. Microwave quantum logic gates for trapped ions[J/OL]. Nature, 2011, 476(7359): 181-184. DOI: 10.1038/nature10290.
- [40] CHEN J S, BLUME-KOHOUT R, YOUNG K C, et al. Benchmarking a trapped-ion quantum computer with 30 qubits[J/OL]. Quantum, 2024, 8: 1516. DOI: 10.22331/q-2024-11-07-1516.
- [41] PAETZNICK A, DA SILVA M P, RYAN-ANDERSON C, et al. Demonstration of logical qubits and repeated error correction with better-than-physical error rates[A/OL]. 2024[2026-03-18]. arXiv: 2404.02280. <https://arxiv.org/abs/2404.02280>.
- [42] EGAN L, DEBROY D, NOEL C, et al. Fault-tolerant control of an error-corrected qubit[J/OL].

- Nature, 2021, 598(7880): 281-286. DOI: 10.1038/s41586-021-03928-y.
- [43] BROWNNUTT M, KUMPH M, RABL P, et al. Ion-trap measurements of electric-field noise near surfaces[J/OL]. Reviews of Modern Physics, 2015, 87(4): 1419-1482. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.1419.
 - [44] HÄFFNER H, ROOS C F, BLATT R. Quantum computing with trapped ions[J/OL]. Physics Reports, 2008, 469(4): 155-203. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.003.
 - [45] DEBNATH S, LINKE N M, FIGGATT C, et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits[J/OL]. Nature, 2016, 536(7614): 63-66. DOI: 10.1038/nature18648.
 - [46] CRAIN S, MOUNT E, BAEK S, et al. Individual addressing of trapped $^{171}\text{Yb}^+$ ion qubits using a microelectromechanical systems-based beam steering system[J/OL]. Appl. Phys. Lett., 2014, 105: 181115. DOI: 10.1063/1.4900754.
 - [47] WANG Y, CRAIN S, FANG C, et al. High-fidelity two-qubit gates using a microelectromechanical-system-based beam steering system for individual qubit addressing [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125: 150505. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.150505.
 - [48] POGORELOV I, FELDKER T, MARCINIAK C D, et al. Compact ion-trap quantum computing demonstrator[J/OL]. PRX Quantum, 2021, 2: 020343. DOI: 10.1103/PRXQuantum.2.020343.
 - [49] CAMPBELL E T, TERHAL B M, VUILLOT C. Roads towards fault-tolerant universal quantum computation[J/OL]. Nature, 2017, 549: 172-179. DOI: 10.1038/nature23460.
 - [50] PARRADO-RODRÍGUEZ P, RYAN-ANDERSON C, BERMUDEZ A, et al. Crosstalk errors in fault-tolerant operations with spectator qubits[J/OL]. Physical Review A, 2021, 104: 042432. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.042432.
 - [51] HE R, CUI J M, LI R R, et al. An ion trap apparatus with high optical access in multiple directions[J/OL]. Review of Scientific Instruments, 2021, 92(7): 073201. DOI: 10.1063/5.0043985.
 - [52] COLDSMOKERIDER. File: Linear paul ion trap.jpg[EB/OL]. 2023[2026-03-18]. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_Paul_ion_trap.jpg.
 - [53] KAWALEC T. File: cold atoms experiment 04.jpg[EB/OL]. 2015[2026-03-18]. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cold_atoms_experiment_04.JPG.
 - [54] BERKELAND D J, MILLER J D, BERGQUIST J C, et al. Minimization of ion micromotion in a paul trap[J/OL]. Journal of Applied Physics, 1998, 83(10): 5025-5033. DOI: 10.1063/1.367318.
 - [55] JOHNSON K G, WONG-CAMPOS J D, RESTELLI A, et al. Active stabilization of ion trap radiofrequency potentials[J/OL]. Review of Scientific Instruments, 2016, 87(5): 053110. DOI: 10.1063/1.4948734.

- [56] MAJOR F G, GHEORGHE V N, WERTH G. Charged particle traps: Physics and techniques of charged particle field confinement[M/OL]. Heidelberg: Springer, 2005. DOI: 10.1007/b137836.
- [57] JAMES D F V. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation[J/OL]. Applied Physics B, 1998, 66(2): 181-190. DOI: 10.1007/s003400050373.
- [58] SCHIFFER J P. Phase transitions in anisotropically confined ionic crystals[J/OL]. Physical Review Letters, 1993, 70(6): 818-821. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.818.
- [59] DUBIN D H E. Theory of structural phase transitions in a trapped Coulomb crystal[J/OL]. Physical Review Letters, 1993, 71(17): 2753-2756. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.2753.
- [60] FISHMAN S, DE CHIARA G, CALARCO T, et al. Structural phase transitions in low-dimensional ion crystals[J/OL]. Physical Review B, 2008, 77: 064111. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.064111.
- [61] DENG K, CHE H, LAN Y, et al. Design of blade-shaped-electrode linear ion traps with reduced anharmonic contributions[J/OL]. Journal of Applied Physics, 2015, 118(11): 113106. DOI: 10.1063/1.4931420.
- [62] HONG J, KIM M, LEE H, et al. Numerical investigation of a segmented-blade ion trap with biasing rods[J/OL]. Applied Physics B, 2023, 129: 16. DOI: 10.1007/s00340-022-07955-z.
- [63] SIVERNS J D, SIMKINS L R, WEIDT S, et al. On the application of radio frequency voltages to ion traps via helical resonators[J/OL]. Applied Physics B, 2012, 107(4): 921-934. DOI: 10.1007/s00340-011-4837-0.
- [64] PAGANO G, HESS P W, KAPLAN H B, et al. Cryogenic trapped-ion system for large scale quantum simulation[J/OL]. Quantum Science and Technology, 2018, 4(1): 014004. DOI: 10.1088/2058-9565/aae0fe.
- [65] 李睿睿. 基于高通光离子阱的量子操控实验研究[D]. 中国科学技术大学, 2022.
- [66] 贺冉. 高通光离子阱的搭建和应用[D]. 中国科学技术大学, 2021.
- [67] 陈炎. 紧聚焦光场在离子阱系统中的应用[D]. 中国科学技术大学, 2025.
- [68] 叶蔚然. 镱离子阱光电测控系统的研制及其工程化探索[D]. 中国科学技术大学, 2025.
- [69] MACALPINE W W, SCHILDKNECHT R O. Coaxial resonators with helical inner conductor [J/OL]. Proceedings of the IRE, 1959, 47(12): 2099-2105. DOI: 10.1109/JRPROC.1959.287128.
- [70] NADLINGER D P, DRMOTA P, MAIN D, et al. Micromotion minimisation by synchronous detection of parametrically excited motion[A/OL]. 2021[2026-03-18]. arXiv: 2107.00056. <https://arxiv.org/abs/2107.00056>.
- [71] KELLER J, PARTNER H L, BURGERMEISTER T, et al. Precise determination of micromotion for trapped-ion optical clocks[J/OL]. Journal of Applied Physics, 2015, 118(10): 104501. DOI:

- 10.1063/1.4930037.
- [72] OLMSCHENK S, YOUNGE K C, MOEHRING D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit[J/OL]. *Physical Review A*, 2007, 76(5): 052314. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.052314.
 - [73] KRAMIDA A, RALCHENKO Y, READER J, et al. Nist atomic spectra database (ver. 5.12), online[EB/OL]. 2024[2026-02-21]. <https://physics.nist.gov/asd>. DOI: 10.18434/T4W30F.
 - [74] TAYLOR P, THOMPSON R C, GILL P, et al. Investigation of the $^2s_{1/2} \rightarrow ^2d_{5/2}$ clock transition in a single laser-cooled Yb^+ ion[J/OL]. *Physical Review A*, 1997, 56(4): 2699-2704. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.2699.
 - [75] WANG P, LUAN C Y, QIAO M, et al. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour[J/OL]. *Nature Communications*, 2021, 12(1): 233. DOI: 10.1038/s41467-020-20330-w.
 - [76] JOHANNING M, BRAUN A, EITENEUER D, et al. Resonance-enhanced isotope-selective photoionization of Yb^+ for ion trap loading[J/OL]. *Applied Physics B*, 2011, 103(2): 327-338. DOI: 10.1007/s00340-011-4502-7.
 - [77] VRIJSEN G, AIKYO Y, SPIVEY R F, et al. Efficient isotope-selective pulsed laser ablation loading of $^{174}\text{Yb}^+$ ions in a surface electrode trap[J/OL]. *Optics Express*, 2019, 27(23): 33907-33914. DOI: 10.1364/OE.27.033907.
 - [78] LEIBRANDT D R, CLARK R J, LABAZIEWICZ J, et al. Laser ablation loading of a surface-electrode ion trap[J/OL]. *Physical Review A*, 2007, 76(5): 055403. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.055403.
 - [79] ESCHNER J, MORIGI G, SCHMIDT-KALER F, et al. Laser cooling of trapped ions[J/OL]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2003, 20(5): 1003-1015. DOI: 10.1364/JOSAB.20.001003.
 - [80] MORIGI G, ESCHNER J, KEITEL C H. Ground state laser cooling using electromagnetically induced transparency[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2000, 85: 4458-4461. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4458.
 - [81] ROOS C F, LEIBFRIED D, MUNDT A, et al. Experimental demonstration of ground state cooling by electromagnetically induced transparency[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2000, 85: 5547-5550. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5547.
 - [82] RABI I I. Space quantization in a gyrating magnetic field[J/OL]. *Physical Review*, 1937, 51(8): 652-654. DOI: 10.1103/PhysRev.51.652.
 - [83] RAMSEY N F. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields[J/OL]. *Physical Review*, 1950, 78(6): 695-699. DOI: 10.1103/PhysRev.78.695.
 - [84] NOEK R, MOUNT E, VRIJSEN G, et al. High speed, high fidelity detection of an atomic

- hyperfine qubit[J/OL]. *Optics Letters*, 2013, 38(22): 4735-4738. DOI: 10.1364/OL.38.004735.
- [85] EJTEMAEE S, THOMAS R, HALJAN P C. Optimization of yb^+ fluorescence and hyperfine-qubit detection[J/OL]. *Physical Review A*, 2010, 82: 063419. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.063419.
- [86] ACTON M, BRICKMAN K A, HALJAN P C, et al. Near-perfect simultaneous measurement of a qubit register[J/OL]. *Quantum Information and Computation*, 2006, 6(6): 465-482. <https://doi.org/10.26421/QIC6.6-1>.
- [87] MACIEJEWSKI F B, ZIMBORÁS Z, OSZMANIEC M. Mitigation of readout noise in near-term quantum devices by classical post-processing based on detector tomography[J]. *Quantum*, 2020, 4: 308.
- [88] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1977, 39(1): 1-22.
- [89] DREVER R W P, HALL J L, KOWALSKI F V, et al. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator[J/OL]. *Applied Physics B*, 1983, 31: 97-105. DOI: 10.1007/BF00702605.
- [90] BLACK E D. An introduction to pound–drever–hall laser frequency stabilization[J/OL]. *American Journal of Physics*, 2001, 69(1): 79-87. DOI: 10.1119/1.1286663.
- [91] Hamamatsu Photonics K.K. 关于 PMT | 光电倍增管 (PMT)[EB/OL]. 2026[2026-03-06]. https://www.hamamatsu.com.cn/cn/zh-cn/product/optical-sensors/pmt/about_pmts.html.
- [92] QIAO M, WANG Y, CAI Z, et al. Double-electromagnetically-induced-transparency ground-state cooling of stationary two-dimensional ion crystals[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2021, 126: 023604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.023604.
- [93] CRAIN S, CAHALL C, VRIJSEN G, et al. High-speed low-crosstalk detection of a 171yb^+ qubit using superconducting nanowire single photon detectors[J/OL]. *Communications Physics*, 2019, 2(1): 97. DOI: 10.1038/s42005-019-0195-8.
- [94] EDMUNDS C, TAN T, MILNE A, et al. Scalable hyperfine qubit state detection via electron shelving in the $2\text{d } 5/2$ and $2\text{f } 7/2$ manifolds in 171yb^+ [J/OL]. *Physical Review A*, 2021, 104(1): 012606. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.012606.
- [95] SØRENSEN A, MØLMER K. Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion[J/OL]. *Physical Review A*, 2000, 62(2): 022311. DOI: 10.1103/PhysRevA.62.022311.
- [96] OZERI R, ITANO W M, BLAKESTAD R B, et al. Errors in trapped-ion quantum gates due to spontaneous photon scattering[J/OL]. *Physical Review A*, 2007, 75(4): 042329. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.042329.
- [97] ROOS C F. Ion trap quantum gates with amplitude-modulated laser beams[J/OL]. *New Journal*

- of Physics, 2008, 10(1): 013002. DOI: 10.1088/1367-2630/10/1/013002.
- [98] KIRCHMAIR G, BENHELM J, ZÄHRINGER F, et al. Deterministic entanglement of ions in thermal states of motion[J/OL]. New Journal of Physics, 2009, 11(2): 023002. DOI: 10.1088/1367-2630/11/2/023002.
- [99] WINELAND D J, MONROE C, ITANO W M, et al. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions[J/OL]. Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 1998, 103(3): 259-328. DOI: 10.6028/jres.103.019.
- [100] DEBNATH S. A programmable five qubit quantum computer using trapped atomic ions[D]. University of Maryland, College Park, 2016.
- [101] DELLAERT T. Metastable states, magic polarization, and hyperfine spectroscopy in 171yb^+ and 173yb^+ [D/OL]. University of California, Los Angeles, 2025[2026-03-18]. <https://escholarship.org/uc/item/8h64754r>.
- [102] BALLANCE C J, HARTY T P, LINKE N M, et al. High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits[J/OL]. Physical Review Letters, 2016, 117: 060504. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.060504.
- [103] GAEBLER J P, TAN T R, LIN Y, et al. High-fidelity universal gate set for $^9\text{be}^+$ ion qubits[J/OL]. Physical Review Letters, 2016, 117(6): 060505. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.060505.
- [104] NIELSEN M A. A simple formula for the average gate fidelity of a quantum dynamical operation[J/OL]. Physics Letters A, 2002, 303(4): 249-252. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)01272-0.
- [105] BOWDREY M D, OI D K L, SHORT A J, et al. Fidelity of single qubit maps[J/OL]. Physics Letters A, 2002, 294(5–6): 258-260. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)00069-5.
- [106] JOHANSSON J R, NATION P D, NORI F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems[J/OL]. Computer Physics Communications, 2012, 183(8): 1760-1772. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.02.021.
- [107] JOHANSSON J R, NATION P D, NORI F. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems[J/OL]. Computer Physics Communications, 2013, 184(4): 1234-1240. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.11.019.
- [108] TALUKDAR I, GORMAN D J, DANIILIDIS N, et al. Implications of surface noise for the motional coherence of trapped ions[J/OL]. Physical Review A, 2016, 93(4): 043415. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.043415.
- [109] EFRON B, TIBSHIRANI R. Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy[J]. Statistical science, 1986: 54-75.
- [110] POGORELOV I. Quantum error correction in a compact ion-trap quantum computer[D]. University of Innsbruck, 2024.
- [111] HUGHES A C, SRINIVAS R, LÖSCHNAUER C M, et al. Trapped-ion two-qubit gates with

- > 99.99% fidelity without ground-state cooling[A/OL]. 2025[2026-03-18]. arXiv: 2510.17286. <https://arxiv.org/abs/2510.17286>.
- [112] LI R R, HE R, CUI J M, et al. A versatile multi-tone laser system for manipulating atomic qubits based on a fiber mach–zehnder modulator and second harmonic generation[J/OL]. *Opt. Express*, 2022, 30: 30098-30107. DOI: 10.1364/OE.462737.
- [113] MAGESAN E, GAMBETTA J M, EMERSON J. Scalable and robust randomized benchmarking of quantum processes[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(18): 180504. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.180504.
- [114] HELSEN J, XUE X, VANDERSYPEN L M K, et al. A new class of efficient randomized benchmarking protocols[J/OL]. *npj Quantum Information*, 2019, 5(1): 71. DOI: 10.1038/s41534-019-0182-7.
- [115] PROCTOR T, RUDINGER K, YOUNG K, et al. What randomized benchmarking actually measures[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(13): 130502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.130502.
- [116] ERHARD A, WALLMAN J J, POSTLER L, et al. Characterizing large-scale quantum computers via cycle benchmarking[J/OL]. *Nature Communications*, 2019, 10: 5347. DOI: 10.1038/s41467-019-13068-7.
- [117] BERGMANN K, THEUER H, SHORE B W. Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 1998, 70: 1003-1025. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.1003.
- [118] VITANOV N V, RANGELOV A A, SHORE B W, et al. Stimulated raman adiabatic passage in physics, chemistry, and beyond[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2017, 89: 015006. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.015006.
- [119] CAMPBELL W C, MIZRAHI J, QURAISHI Q, et al. Ultrafast gates for single atomic qubits[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105: 090502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.090502.
- [120] MIZRAHI J, SENKO C, NEYENHUIS B, et al. Ultrafast spin-motion entanglement and interferometry with a single atom[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, 110: 203001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.203001.
- [121] EGAN L N. Scaling quantum computers with long chains of trapped ions[D]. University of Maryland, 2021.
- [122] BINAI-MOTLAGH A, DAY M L, VIDENOV N, et al. A guided light system for agile individual addressing of Ba^+ qubits with 10^{-4} level intensity crosstalk[J/OL]. *Quantum Sci. Technol.*, 2023, 8: 045012. DOI: 10.1088/2058-9565/ace6cb.
- [123] SOTIROVA A S, SUN B, LEPPARD J D, et al. Low cross-talk optical addressing of trapped-ion qubits using a novel integrated photonic chip[J/OL]. *Light: Science & Applications*, 2024,

- 13(1): 199. DOI: 10.1038/s41377-024-01542-x.
- [124] QIAN Z H, CUI J M, LUO X W, et al. Super-resolved imaging of a single cold atom on a nanosecond timescale[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127: 263603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.263603.
- [125] ZUPANCIC P, PREISS P M, MA R, et al. Ultra-precise holographic beam shaping for microscopic quantum control[J/OL]. *Opt. Express*, 2016, 24: 13881-13893. DOI: 10.1364/OE.24.013881.
- [126] SHIH C Y, MOTLAKUNTA S, KOTIBHASKAR N, et al. Reprogrammable and high-precision holographic optical addressing of trapped ions for scalable quantum control[J/OL]. *npj Quantum Inf.*, 2021, 7: 57. DOI: 10.1038/s41534-021-00396-0.
- [127] SILVA A, GREPLOVA E. Hands-on introduction to randomized benchmarking[J/OL]. *SciPost Physics Lecture Notes*, 2025: 97. DOI: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.97.
- [128] KNILL E, LEIBFRIED D, REICHLE R, et al. Randomized benchmarking of quantum gates[J/OL]. *Physical Review A*, 2008, 77(1): 012307. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.012307.
- [129] EMERSON J, ALICKI R, ŻYCZKOWSKI K. Scalable noise estimation with random unitary operators[J/OL]. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, 7(10): S347-S352. DOI: 10.1088/1464-4266/7/10/021.
- [130] XUE X, WATSON T F, HELSEN J, et al. Benchmarking gate fidelities in a Si/SiGe two-qubit device[J/OL]. *Physical Review X*, 2019, 9(2): 021011. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.021011.
- [131] CUI J M, CHEN Y, ZHOU Y F, et al. Transverse polarization gradient entangling gates for trapped-ion quantum computation[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2025, 135: 260604. DOI: 10.1103/w5l6-wmrl.
- [132] ZHAO X, BIAN J, LI Y, et al. High-fidelity two-qubit quantum logic gates in a trapped-ion chain using axial motional modes[J/OL]. *Chinese Physics Letters*, 2025, 42(11): 110601. DOI: 10.1088/0256-307X/42/11/110601.
- [133] ZHANG S, LU Y, ZHANG K, et al. Error-mitigated quantum gates exceeding physical fidelities in a trapped-ion system[J/OL]. *Nature Communications*, 2020, 11: 587. DOI: 10.1038/s41467-020-14376-z.
- [134] LU Y, ZHANG S, ZHANG K, et al. Global entangling gates on arbitrary ion qubits[J/OL]. *Nature*, 2019, 572: 363-367. DOI: 10.1038/s41586-019-1428-4.
- [135] HUANG Y Y, FENG L, WU Y K, et al. Realization of a functioning dual-type trapped-ion quantum network node[J/OL]. *Science Advances*, 2025, 11(49). DOI: 10.1126/sciadv.aeb4076.
- [136] WANG C, HUANG C, ZHANG H, et al. Experimental realization of direct entangling gates between dual-type qubits[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2025, 134: 010601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.010601.

- [137] XIE Y, CHEN T, WANG H, et al. Coherent manipulation of multiple ions in a room-temperature surface-electrode trap[J/OL]. *Acta Physica Sinica*, 2025, 74(24): 240301. DOI: 10.7498/aps.74.20251454.
- [138] BIAN J, LIU T, DING M, et al. Architecture of a scalable universal quantum processor by encoding two qubits on electron and nuclear spins in a trapped ion[J/OL]. *New Journal of Physics*, 2026, 28(1): 014509. DOI: 10.1088/1367-2630/ae309f.
- [139] Alpine Quantum Technologies. Products[EB/OL]. 2026[2026-03-09]. <https://www.aqt.eu/products/>.
- [140] LÖSCHNAUER C M, MOSCA TOBA J, HUGHES A C, et al. Scalable, high-fidelity all-electronic control of trapped-ion qubits[J/OL]. *PRX Quantum*, 2025, 6: 040313. DOI: 10.1103/h4wk-v31j.
- [141] SMITH M C, LEU A D, MIYANISHI K, et al. Single-qubit gates with errors at the 10^{-7} level[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2025, 134(23): 230601. DOI: 10.1103/42w2-6ccy.
- [142] WRIGHT K, BECK K M, DEBNATH S, et al. Benchmarking an 11-qubit quantum computer[J/OL]. *Nature Communications*, 2019, 10: 5464. DOI: 10.1038/s41467-019-13534-2.
- [143] BROWN K R, WILSON A C, COLOMBE Y, et al. Single-qubit-gate error below 10^{-4} in a trapped ion[J/OL]. *Physical Review A*, 2011, 84: 030303. DOI: 10.1103/PhysRevA.84.030303.
- [144] RANSFORD A, et al. Helios: A 98-qubit trapped-ion quantum computer[A/OL]. 2025[2026-03-18]. arXiv: 2511.05465. <https://arxiv.org/abs/2511.05465>.
- [145] FAORLIN T, PANZL L, GROSSER P, et al. Entangling ions with engineered light gradients[A/OL]. 2026[2026-03-18]. <https://arxiv.org/abs/2603.07548>.
- [146] AKERMAN N, NAVON N, KOTLER S, et al. Universal gate-set for trapped-ion qubits using a narrow linewidth diode laser[J/OL]. *New Journal of Physics*, 2015, 17: 113060. DOI: 10.1088/1367-2630/17/11/113060.
- [147] MANOVITZ T, SHAPIRA Y, GAZIT L, et al. Trapped-ion quantum computer with robust entangling gates and quantum coherent feedback[J/OL]. *PRX Quantum*, 2022, 3(1): 010347. DOI: 10.1103/PRXQuantum.3.010347.
- [148] WANG K, LU Z, ZHANG C, et al. Demonstration of low-overhead quantum error correction codes[J/OL]. *Nature Physics*, 2026, 22: 308-314. <https://doi.org/10.1038/s41567-025-03157-4>.
- [149] GAO D, FAN D, ZHA C, et al. Establishing a new benchmark in quantum computational advantage with 105-qubit zuhongzhi 3.0 processor[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2025, 134(9): 090601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.090601.
- [150] CHEN Z, LIU W, MA Y, et al. Efficient implementation of arbitrary two-qubit gates using unified control[J/OL]. *Nature Physics*, 2025, 21: 1489-1496. DOI: 10.1038/s41567-025-029

- 90-x.
- [151] BU K, HUAI S, ZHANG Z, et al. Tantalum airbridges for scalable superconducting quantum processors[J/OL]. npj Quantum Information, 2025, 11: 17. DOI: 10.1038/s41534-025-00972-8.
 - [152] LIU H Y, SUN T P, CHEN Z Y, et al. Variational quantum simulation of many-body dissipative dynamics on a superconducting quantum processor[A/OL]. 2025[2026-03-18]. <https://arxiv.org/abs/2510.20118>.
 - [153] YANG X X, GUO L L, ZHANG H F, et al. Experimental implementation of short-path nonadiabatic geometric gates in a superconducting circuit[J/OL]. Physical Review Applied, 2023, 19: 044076. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.19.044076.
 - [154] ROWER D A, DING L, ZHANG H, et al. Suppressing counter-rotating errors for fast single-qubit gates with fluxonium[J/OL]. PRX Quantum, 2024, 5(4): 040342. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.5.040342>.
 - [155] LIN W J, CHO H, CHEN Y, et al. 24 days-stable CNOT gate on fluxonium qubits with over 99.9% fidelity[J/OL]. PRX Quantum, 2025, 6: 010349. DOI: 10.1103/PRXQuantum.6.010349.
 - [156] LIN R, LI Y, ZHENG L T, et al. Sustaining high-fidelity quantum logic in neutral-atom circuits via mid-circuit operations[A/OL]. 2026[2026-03-18]. arXiv: 2603.01612. <https://arxiv.org/abs/2603.01612>.
 - [157] EDLBAUER H, WANG J, HUQ A M S E, et al. An 11-qubit atom processor in silicon[J/OL]. Nature, 2025, 648: 569-575. DOI: 10.1038/s41586-025-09827-w.
 - [158] NOIRI A, TAKEDA K, NAKAJIMA T, et al. Fast universal quantum gate above the fault-tolerance threshold in silicon[J/OL]. Nature, 2022, 601: 338-342. DOI: 10.1038/s41586-021-04279-z.
 - [159] XUE X, RUSS M, SAMKHARADZE N, et al. Quantum logic with spin qubits crossing the surface code threshold[J/OL]. Nature, 2022, 601: 343-347. DOI: 10.1038/s41586-021-04273-w.
 - [160] BARTLING H P, YUN J, SCHYMIK K N, et al. Universal high-fidelity quantum gates for spin qubits in diamond[J/OL]. Physical Review Applied, 2025, 23: 034052. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.23.034052.
 - [161] ALIFERIS P, GOTTESMAN D, PRESKILL J. Quantum accuracy threshold for concatenated distance-3 codes[J/OL]. Quantum Information & Computation, 2006, 6(2): 97-165. DOI: 10.26421/QIC6.2-1.
 - [162] BLUME-KOHOUT R, YOUNG K C. A volumetric framework for quantum computer benchmarks[J/OL]. Quantum, 2020, 4: 362. DOI: 10.22331/q-2020-11-15-362.
 - [163] CROSS A W, JAVADI-ABHARI A, ALEXANDER T, et al. Openqasm 3: A broader and

- deeper quantum assembly language[J/OL]. *ACM Transactions on Quantum Computing*, 2022, 3(3): 1-50. DOI: 10.1145/3505636.
- [164] MCKAY D C, ALEXANDER T, BELLO L, et al. Qiskit backend specifications for openqasm and openpulse experiments[A/OL]. 2018[2026-03-18]. arXiv: 1809.03452. <https://arxiv.org/abs/1809.03452>.
- [165] MURALI P, BAKER J M, JAVADI-ABHARI A, et al. Noise-adaptive compiler mappings for noisy intermediate-scale quantum computers[C/OL]//*Proceedings of the 24th International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems (AS-PLOS '19)*. 2019: 1015-1029. DOI: 10.1145/3297858.3304075.
- [166] RIESEBOS L, BONDURANT B, WHITLOW J, et al. Modular software for real-time quantum control systems[C/OL]//*2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*. 2022: 545-555. DOI: 10.1109/QCE53715.2022.00077.
- [167] LAM C K, MAK S, NADLINGER D, et al. Combining processing throughput, low latency and timing accuracy in experiment control[A/OL]. 2021[2026-03-18]. arXiv: 2111.15290. <https://arxiv.org/abs/2111.15290>.
- [168] HAEFFNER H, GULDE S, RIEBE M, et al. Precision measurement and compensation of optical stark shifts for an ion-trap quantum processor[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(14): 143602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.143602.
- [169] LEE P J, BRICKMAN K A, DESLAURIERS L, et al. Phase control of trapped ion quantum gates[J/OL]. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, 7(10): S371-S383. DOI: 10.1088/1464-4266/7/10/025.
- [170] INLEK I V, VITTORINI G, HUCUL D, et al. Quantum gates with phase stability over space and time[J/OL]. *Physical Review A*, 2014, 90(4): 042316. DOI: 10.1103/PhysRevA.90.042316.
- [171] MERMIN N D. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1990, 65(15): 1838-1840. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.1838.
- [172] LEIBFRIED D, KNILL E, SEIDELIN S, et al. Creation of a six-atom Schrödinger cat state[J/OL]. *Nature*, 2005, 438: 639-642. DOI: 10.1038/nature04251.
- [173] Quantinuum. Quantum Volume[EB/OL]. 2026[2026-03-09]. <https://www.quantinuum.com/glossary-item/quantum-volume>.
- [174] Alpine Quantum Technologies. State of Quantum Computing in Europe: AQT pushing performance with a Quantum Volume of 128[EB/OL]. 2023[2026-03-09]. <https://www.aqt.eu/aqt-pushing-performance-with-a-quantum-volume-of-128/>.
- [175] STUART E. New on IQM Resonance: IQM Emerald — almost 3x qubits for the same reliable quality[EB/OL]. 2025[2026-03-09]. <https://meetiqm.com/blog/new-on-iqm-resonance-iqm->

- emerald-almost-3x-qubits-for-the-same-reliable-quality/.
- [176] GAMBETTA J. Quantum-centric supercomputing: The next wave of computing[EB/OL]. 2022 [2026-03-09]. <https://www.ibm.com/quantum/blog/next-wave-quantum-centric-supercomputing>.
 - [177] IonQ. IonQ Achieves Record Breaking Quantum Performance Milestone of #AQ 64[EB/OL]. 2025[2026-03-09]. <https://www.ionq.com/news/ionq-achieves-record-breaking-quantum-performance-milestone-of-aq-64>.
 - [178] IonQ. Qc-app-oriented-benchmarks: Aq.md (algorithmic qubits specification)[EB/OL]. 2024 [2026-02-16]. https://github.com/ionq/QC-App-Oriented-Benchmarks/blob/master/_doc/AQ.md.
 - [179] MCKAY D C, HINCKS I, PRITCHETT E J, et al. Benchmarking quantum processor performance at scale[A/OL]. 2023[2026-03-18]. arXiv: 2311.05933. <https://arxiv.org/abs/2311.05933>.
 - [180] MONTANEZ-BARRERA J A, MICHELSEN K, BERNAL NEIRA D E. Evaluating the performance of quantum processing units at large width and depth[A/OL]. 2025[2026-03-18]. arXiv: 2502.06471. <https://arxiv.org/abs/2502.06471>.
 - [181] LUBINSKI T, JOHRI S, VAROSY P, et al. Application-oriented performance benchmarks for quantum computing[J/OL]. IEEE Transactions on Quantum Engineering, 2023, 4: 1-32. DOI: 10.1109/TQE.2023.3253761.
 - [182] IBM Quantum. Latest updates[EB/OL]. 2026[2026-03-17]. <https://quantum.cloud.ibm.com/docs/guides/latest-updates>.
 - [183] 么正量子. 科研进展 | 突破量子体积 32, 么正量子以离子阱技术实现高质量量子计算新里程碑[EB/OL]. 2026[2026-04-04]. <https://mp.weixin.qq.com/s/ALrYgwUSwp8TVOi3ojBAAQ>.
 - [184] PINO J M, DREILING J M, FIGGATT C, et al. Demonstration of the trapped-ion quantum ccd computer architecture[J/OL]. Nature, 2021, 592(7853): 209-213. DOI: 10.1038/s41586-021-03318-4.
 - [185] RYAN-ANDERSON C, BOHNET J G, LEE K, et al. Realization of real-time fault-tolerant quantum error correction[J/OL]. Physical Review X, 2021, 11: 041058. DOI: 10.1103/PhysRevX.11.041058.
 - [186] POSTLER L, BUTT F, POGORELOV I, et al. Demonstration of fault-tolerant steane quantum error correction[J/OL]. PRX Quantum, 2024, 5: 030326. DOI: 10.1103/PRXQuantum.5.030326.

致谢

行文至此，正值春风料峭，浮生若梦，为欢几何。

踱步回廊，回首博士数载，学问日进，师恩难报。

在量信楼办公时，常能遇到郭光灿院士。郭老师是我国量子光学领域的重要开拓者，更是一位兼具科学智慧与家国情怀的长辈。他也常常对年轻人投身量子科学建设表示深深赞许与鼓励。对此，我一直深受鼓舞。而作为我们量子网络大课题组的负责人，李传锋教授领导团队为我们提供了良好的实验平台，数十年间培养了大批专家学者，是课题组在各种意义上的灵魂支柱。

于整个博士生涯而言，我要衷心感谢我的导师黄运锋教授给予我的深切关怀与指导，帮助我迈过诸多迷茫时刻。初入学时，黄老师关于“保持钝感”的教导，让我受益匪浅，使我在面对困难时，始终能砥砺前行，乃至如今已内化成一种人生哲学。

在更具体的科研与实验中，我尤其要感谢崔金明老师。崔老师是一名造诣深厚、经验精湛的专家，虽然不善言辞，但桃李不言，下自成蹊。崔老师日复一日的切身指导，不仅教会我许多知识，更让我在思维层面敢于将一切问题都视作纸老虎。

在方向目标的指引上，我要真挚地感谢韩永建教授的悉心教导与支持。韩老师讲授的量子计算导论课程让人如沐春风，对量子计算未来发展的研判深刻而富有感染力，让投身量子事业的我热血沸腾。韩老师同时作为合肥么正量子科技有限公司的创始人，为我的博士研究提供了重要帮助。我博士期间的许多工程工作，都离不开与么正量子工程师团队的合作。

在学术生活中，我谨向各位师兄师姐表达诚挚谢意。特别感谢贺冉师兄在各个方面对我无微不至的耐心鼓励与宝贵帮助；特别感谢李睿睿师兄带领我走过懵懂的科研初期并给予我无私关心；特别感谢高新霞师姐为课题组日常增添许多温暖与生气。

感谢所有伙伴们的互帮互助。特别感谢陈树谦和亓文昊，一起研学，共同进步。

感谢我的家人和朋友，也感谢始终给予我温暖的皮皮和可可。感谢你们在我面对压力与挫折时给予的理解、鼓励与陪伴。

感谢实验室和学院提供的科研条件与学习环境，感谢相关项目与基金对本研究工作的支持，感谢合肥么正量子团队的有力协助。

龙吟龙吟风云会，长啸一声抒怀襟。谨以此致谢，献给在博士期间给予我指导、帮助与陪伴的所有师长、同门、伙伴及家人朋友。

在读期间取得的科研成果

已发表论文:

- (1) **Yi-Long Chen**, Rui-Rui Li, Ran He, Shu-Qian Chen, Wen-Hao Qi, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Low-crosstalk optical addressing system for atomic qubits based on multiple objectives and acousto-optic deflectors. *Physical Review Applied*, 2024, **22**: 054003.
- (2) Wei-Ran Ye, Jin-Ming Cui, Yan Chen, **Yi-Long Chen**, Rui-Rui Li, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. An integrated laser system for manipulating trapped ions qubits. *Optics & Laser Technology*, 2025, **186**: 112694.
- (3) Rui-Rui Li, Wei-Ran Ye, **Yi-Long Chen**, Shu-Qian Chen, Wen-Hao Qi, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Generation of visible Raman operation laser by a fiber electro-optical modulator feedback loop. *Chinese Optics Letters*, 2024, **22**(2): 022702.
- (4) Rui-Rui Li, Ran He, Jin-Ming Cui, Yan Chen, Wei-Ran Ye, **Yi-Long Chen**, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. A versatile multi-tone laser system for manipulating atomic qubits based on a fiber Mach-Zehnder modulator and second harmonic generation. *Optics Express*, 2022, **30**(17): 30098–30107.

在撰论文:

- (1) **Yi-Long Chen**, Shu-Qian Chen, Zhe Chen, Xichuan Wu, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. System-Level Benchmarking of a Trapped-Ion Quantum Processor via High-Fidelity Entangling Gates and Quantum Volume 32. 论文撰写中.

申请专利:

- (1) 姚清泉, 崔金明, **陈一龙**, 黄运锋, 李传锋. 一种实时原位校准与参数化任意调制多频 DDS 一体化离子阱测控系统、测控方法、设备. 发明专利申请, 2025. (第三发明人)